

# COMPOSANTES CONNEXES GÉOMÉTRIQUES DE LA TOUR DES ESPACES DE MODULES DE GROUPES $p$ -DIVISIBLES

MIAOFEN CHEN

**RÉSUMÉ.** Soit  $\check{\mathcal{M}}$  un espace de Rapoport-Zink non-ramifié de type EL ou de type PEL unitaire/symplectique. Soit  $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$  la tour d'espaces analytiques de Berkovich classifiant les structures de niveau au-dessus de la fibre générique de  $\check{\mathcal{M}}$ . On a défini dans [Che13] un morphisme déterminant  $\det_K$  de la tour  $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$  vers une tour d'espaces analytiques de Berkovich de dimension 0 associé au cocentre du groupe réductif lié à l'espace  $\check{\mathcal{M}}$ . Supposons que les polygones de Newton et de Hodge associés à  $\check{\mathcal{M}}$  ne se touchent pas en dehors de leurs extrémités. De plus supposons vérifiée une conjecture sur l'ensemble des composantes connexes de la fibre spéciale réduite de  $\check{\mathcal{M}}$ . Alors on montre que les fibres géométriques du morphisme déterminant  $\det_K$  sont les composantes connexes géométriques de  $\check{\mathcal{M}}_K$ . La conjecture dans l'hypothèse sera confirmée en toute généralité dans un article en préparation de Kisin, Viehmann et l'auteur.

**Mots clés :** Espaces de Rapoport-Zink, Groupes  $p$ -divisibles, Composantes connexes géométriques.

**ABSTRACT.** Let  $\check{\mathcal{M}}$  be an unramified Rapoport-Zink space of EL type or unitary/symplectic PEL type. Let  $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$  be the tower of Berkovich's analytic spaces classifying the level structures over the generic fiber of  $\check{\mathcal{M}}$ . In [Che13], we have defined a determinant morphism  $\det_K$  from the tower  $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$  to a tower of Berkovich's analytic spaces of dimension 0 associated to the cocenter of the reductive group related to the space  $\check{\mathcal{M}}$ . Suppose that the Newton polygon and Hodge polygon related to  $\check{\mathcal{M}}$  don't touch each other except their end point. And suppose that a conjecture on the set of connected components of the reduced special fiber of  $\check{\mathcal{M}}$  holds. Then we prove that the geometric fibers of the determinant morphism  $\det_K$  are the geometrically connected components of  $\check{\mathcal{M}}_K$ . The conjecture in the hypothesis will be confirmed in a paper in preparation by Kisin, Viehmann and the author.

**Keywords:** Rapoport-Zink spaces,  $p$ -divisible groups, Geometrically connected components.

## INTRODUCTION

Soient  $N$  un entier strictement positif et  $X(N)$  la courbe modulaire sur  $\mathbb{Q}$  associée au groupe de congruence

$$\Gamma(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid b \equiv c \equiv 0 \pmod{N}, a \equiv d \equiv 1 \pmod{N} \right\}.$$

Fixons  $\zeta_N \in \mathbb{C}$  une racine primitive  $N$ -ième de l'unité. Il est alors bien connu qu'on a un isomorphisme  $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_N)|\mathbb{Q})$ -équivariant:

$$(1) \quad \pi_0(X(N)_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\sim} \zeta_N^{(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times},$$

où  $\zeta_N^{(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times}$  désigne l'ensemble des racines  $N$ -ièmes primitives de l'unité. Soit  $(E, \eta) \in X(N)(\mathbb{C})$  avec  $E$  une courbe elliptique et  $\eta : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 \xrightarrow{\sim} E[N]$ . Posons  $e_1 := \eta((1, 0))$  et  $e_2 := \eta((0, 1))$ . Alors l'image de  $(E, \eta)$  via (1) est  $\langle e_1, e_2 \rangle$  avec  $\langle \cdot, \cdot \rangle : E[N] \times E[N] \rightarrow \mu_N(\mathbb{C})$  l'accouplement de Weil.

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* 20G25, 14G35.

Plus généralement, soient  $G$  un groupe réductif défini sur  $\mathbb{Q}$  et  $(G, X)$  une donnée de Shimura. Notons  $E$  le corps reflex de cette donnée. Soit  $(\mathrm{Sh}_K(G, X))_K$  la tour de variétés de Shimura associée. Deligne montre dans [Del79] que si le groupe dérivé  $G^{\mathrm{der}}$  de  $G$  est simplement connexe, il existe une bijection

$$(2) \quad \pi_0(\mathrm{Sh}_K(G, X)_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\sim} D(\mathbb{Q})^{\dagger} \backslash D(\mathbb{A}_f) / \det(K),$$

où  $D = G/G^{\mathrm{der}}$ ,  $\det : G \rightarrow D$  est la projection, et  $D(\mathbb{Q})^{\dagger} := D(\mathbb{Q}) \cap \mathrm{Im}(Z(\mathbb{R}) \xrightarrow{\det} D(\mathbb{R}))$  avec  $Z$  le centre de  $G$ . Cet isomorphisme est compatible à l'action par correspondances de Hecke.

La cohomologie des variétés de Shimura réalise des cas particuliers de correspondances de Langlands globales entre représentations automorphes de  $G$  et représentations  $\ell$ -adiques de  $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|E)$ . La description précédente des composantes connexes géométriques se traduit de manière cohomologique: le  $H^0$  de la tour de variétés de Shimura réalise des correspondances de Langlands entre représentations automorphes de dimension 1 de  $G$ , des caractères de Hecke de  $D$  composés avec la projection  $\det$ , et des caractères de  $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|E)$ . Les deux sont reliés via la théorie du corps de classe de  $E$ .

Dans cet article, nous démontrons un analogue local en des places non-archimédiennes de cet isomorphisme. Plus précisément, nous décrivons les composantes connexes géométriques munies de leur action de Galois de certains espaces de modules  $p$ -adiques introduits par Rapoport et Zink. Traduit de façon cohomologique cela exprime le fait que le  $H^0$  de ces tours d'espaces de modules  $p$ -adiques réalise des correspondances de Langlands locales provenant de la théorie du corps de classe locale via le cocentre du groupe réductif associé à notre espace.

Fixons une clôture algébrique  $\overline{\mathbb{Q}}_p$  de  $\mathbb{Q}_p$ . Soit  $\overline{\mathbb{F}}_p$  la clôture algébrique de  $\mathbb{F}_p$  associée. Notons  $W = W(\overline{\mathbb{F}}_p)$  l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans  $\overline{\mathbb{F}}_p$ .

On s'intéresse dans cet article aux espaces de Rapoport-Zink non ramifiés  $\check{\mathcal{M}} = \check{\mathcal{M}}(G, b, \mu)$  de type EL et PEL unitaires ou symplectiques défini à partir d'une donnée de Rapoport-Zink  $(G, b, \mu)$  satisfaisant certaines conditions, où

- $G$  est un groupe réductif non-ramifié sur  $\mathbb{Q}_p$  qui est soit une restriction de scalaires d'un groupe linéaire, soit un groupe de similitudes unitaires ou symplectiques,
- $b$  est un élément de  $G(W \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$  dont on note  $\bar{b}$  la classe de  $\sigma$ -conjugaison,
- $\mu : \mathbb{G}_{m, \overline{\mathbb{Q}}_p} \rightarrow G_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$  est un cocaractère minuscule de  $G$  dont on note  $\bar{\mu}$  la classe de conjugaison.

Notons  $E$  le corps reflex associé (i.e., le corps de définition de  $\bar{\mu}$ ). Soit  $\check{E}$  le complété de l'extension maximale non-ramifiée de  $E$  dans  $\overline{\mathbb{Q}}_p$  d'anneau des entiers  $\mathcal{O}_{\check{E}}$ . D'après Rapoport et Zink [RZ96], l'espace  $\check{\mathcal{M}}$  est un schéma formel localement formellement de type fini sur  $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\check{E}})$  qui représente certain espace de modules de groupes  $p$ -divisibles.

Dans le cas le plus simple (i.e.,  $G = GL_n$ ), c'est-à-dire pour un espace de Rapoport-Zink sans structure additionnelle, le schéma formel  $\check{\mathcal{M}} = \check{\mathcal{M}}(G, b, \mu)$  représente l'espace de modules défini comme un foncteur

$$\check{\mathcal{M}} : \mathrm{Nil}_W \rightarrow \mathcal{E}\mathrm{ns}$$

où  $\mathrm{Nil}_W$  est la catégorie des  $\mathrm{Spec}(W)$ -schémas  $S$  tels que  $p$  soit localement nilpotent sur  $S$ . Fixons un groupe  $p$ -divisible  $\mathbb{X}$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$ . Le foncteur  $\check{\mathcal{M}}$  associe à  $S \in \mathrm{Nil}_W$  l'ensemble des classes d'isomorphisme des couples  $(X, \rho)$  où

- $X$  est un groupe  $p$ -divisible défini sur  $S$ ;
- $\rho : \mathbb{X} \times_{\overline{\mathbb{F}}_p} (S \bmod p) \rightarrow X \times_S (S \bmod p)$  est une quasi-isogénie.

L'espace  $\check{\mathcal{M}} = \check{\mathcal{M}}(G, b, \mu)$  est muni de plusieurs structures (cf. [RZ96])

- une application localement constante  $\varkappa : \check{\mathcal{M}} \rightarrow \mathbb{Z}$  qui est définie par l'hauteur de la quasi-isogénie à un scalaire près.

- une action à gauche du groupe  $J(\mathbb{Q}_p)$ , où  $J$  est un groupe réductif sur  $\mathbb{Q}_p$  défini par  $b$ . En effet,  $J$  est une forme intérieure d'un sous-groupe de Levi de  $G$ .
- une donnée de descente de  $\check{E}$  à  $E$ . Bien que non effective, cette donnée de descente est suffisante pour définir une action de Frobenius sur la cohomologie de ces espaces.

Pour des rappels plus détaillés de la notion d'espace de Rapoport-Zink non-ramifié en général, on renvoie à la section 1.1.

Fixons un modèle entier réductif de  $G$  et soit  $G(\mathbb{Z}_p)$  le sous-groupe compact hyperspécial associé dans  $G(\mathbb{Q}_p)$ . Soit  $\check{\mathcal{M}}^{an}$  la fibre générique de  $\check{\mathcal{M}}$ . C'est un  $\check{E}$ -espace analytique de Berkovich au-dessus duquel il existe une tour d'espaces analytiques  $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$ , où  $K$  parcourt les sous-groupes ouverts de  $G(\mathbb{Z}_p)$ . Le groupe  $J(\mathbb{Q}_p)$  agit à gauche sur chaque  $\check{\mathcal{M}}_K$  pour tout  $K$ . De plus, la tour  $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$  est munie d'une action à droite de  $G(\mathbb{Q}_p)$  par correspondances de Hecke. Cette action commute à celle de  $J(\mathbb{Q}_p)$ .

L'objectif de cet article est d'étudier l'ensemble des composantes connexes géométriques de la tour  $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$ . Pour cela, on étudie le morphisme déterminant défini dans [Che13] de cette tour vers une tour d'espaces analytiques de Berkovich de dimension 0 étale sur  $\check{E}$ . Le but du morphisme déterminant est appelé la tour d'espaces de Rapoport-Zink toriques dont on rappelle brièvement.

Soient  $(G, b, \mu)$  comme précédemment,  $D = G/G^{der}$  l'abélianisé de  $G$ , qui est un tore  $p$ -adique non-ramifié, et  $\det : G \rightarrow D$  la projection. Considérons la donnée  $(D, \det \tilde{\mu})$  induite par la donnée  $(G, b, \mu)$  via la projection  $\det$ , où  $\tilde{\mu} : \mathbb{G}_m \rightarrow G$  est encore un cocaractère de  $G$  qui diffère de  $\mu$  par un cocaractère central. On utilise dans la suite  $\tilde{\mu}$  au lieu de  $\mu$  à cause de la normalisation du Frobenius et de la filtration de Hodge des modules de Dieudonné covariants. À cette nouvelle donnée  $(D, \det \tilde{\mu})$ , on peut définir de façon ad-hoc une tour d'espaces analytiques de Berkovich

$$(\check{\mathcal{M}}(D, \det \tilde{\mu})_K)_{K \subset D(\mathbb{Q}_p)}$$

de dimension 0 étales sur  $\check{E}$ , où  $K$  parcourt les sous-groupes compacts ouverts de  $D(\mathbb{Q}_p)$ . On renvoie à la section 1.2 pour plus de détails.

On a défini dans [Che13] un morphisme de tours d'espaces analytiques de Berkovich

$$(3) \quad (\check{\mathcal{M}}(G, b, \mu)_K)_K \longrightarrow (\check{\mathcal{M}}(D, \det \tilde{\mu})_{\det K})_K$$

compatible aux structures additionnelles, où  $K$  parcourt les sous-groupes ouverts de  $G(\mathbb{Z}_p)$ .

Soient  $X^{\text{univ}}$  le groupe  $p$ -divisible universel sur  $\check{\mathcal{M}}$  et  $\bar{x}$  un point géométrique de  $\check{\mathcal{M}}^{an}$ . Notons " $\pi_1$ " pour le groupe fondamental profini des espaces analytiques classifiant les revêtements étales finis. On a alors des représentations de monodromie arithmétiques et géométriques

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\check{\mathcal{M}}^{an} \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \bar{x}) & & \\ \downarrow & \searrow \rho_{\bar{x}}^{geo} & \\ \pi_1(\check{\mathcal{M}}^{an}, \bar{x}) & \xrightarrow{\rho_{\bar{x}}} & \text{Aut}(T_p(X_{\bar{x}}^{\text{univ}})) \simeq G(\mathbb{Z}_p). \end{array}$$

L'existence de l'application déterminant (3) induit un diagramme

$$(4) \quad \begin{array}{ccccccc} \pi_1(\check{\mathcal{M}}^{an} \otimes \mathbb{C}_p, \bar{x}) & \longrightarrow & \pi_1(\check{\mathcal{M}}^{an}, \bar{x}) & \longrightarrow & I_E & \longrightarrow & 1 \\ \rho_{\bar{x}}^{geo} \downarrow & & \downarrow \rho_{\bar{x}} & & \downarrow \chi_{\det \tilde{\mu}} & & \\ 1 & \longrightarrow & G^{\text{der}}(\mathbb{Z}_p) & \longrightarrow & G(\mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\det} & D(\mathbb{Z}_p) \end{array}$$

où  $\chi_{\det \tilde{\mu}} : I_E \rightarrow D(\mathbb{Z}_p)$  est un caractère associé à  $\det \tilde{\mu}$  et  $I_E = \text{Gal}(\overline{E}|E)$  désigne le groupe d'inertie de  $E$ .

De Jong a montré dans [dJ95b] que  $\rho_{\bar{x}}^{\text{geo}}$  est surjectif dans le cas des espaces de Lubin-Tate. Strauch a redémontré ce résultat par une autre méthode dans [Str08]. On généralise cela aux espaces de Rapoport-Zink non-ramifiés précédents sous la conjecture suivante.

**Conjecture (6.1.1).** *Soit  $\check{\mathcal{M}} = \check{\mathcal{M}}(G, b, \mu)$  un espace de Rapoport-Zink non-ramifié simple de type EL ou PEL symplectique/unitaire. Supposons que les polygones de Hodge et de Newton associés à la donnée de Rapoport-Zink ne se touchent pas en dehors de leurs extrémités (i.e.,  $(b, \mu)$  est HN-irréductible, cf. définition 5.0.4). Alors,*

$$\varkappa : \pi_0(\check{\mathcal{M}}) \xrightarrow{\sim} \text{Im } \varkappa.$$

La conjecture est connue dans des cas particuliers. Dans le cas des espaces de Lubin-Tate, elle est vraie pour des raisons évidentes. Lorsque le groupe  $G$  est déployé (i.e.,  $G = \text{GL}_n$  pour le cas EL et  $G = \text{GSp}_{2n}$  pour le cas PEL symplectique), elle a été démontrée par Viehmann ([Vie08b], [Vie08a]). Dans le cas PEL unitaire basique en signature  $(1, n-1)$  avec une extension quadratique de  $\mathbb{Q}_p$ , elle a été démontrée par Vollaard ([Vol10]). Dans un travail récent en préparation de Kisin, Viehmann et l'auteure [CKV], cette conjecture sera confirmée en toute généralité.

Remarquons enfin que cette conjecture est un problème d'espaces de modules en caractéristique positive:  $\pi_0(\check{\mathcal{M}}) = \pi_0(\check{\mathcal{M}}_{\text{red}})$  où  $\check{\mathcal{M}}_{\text{red}}$  est un  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -schéma réduit localement de type fini.

Voici donc les résultats principaux de cet article.

**Théorème A (6.2.1).** Supposons la conjecture ci-dessus vérifiée. Supposons que les polygones de Hodge et de Newton associés à la donnée de Rapoport-Zink ne se touchent pas en dehors de leurs extrémités (cf. définition 5.0.4). Soit  $\bar{x} \in \check{\mathcal{M}}^{\text{an}}(\overline{E})$ . La représentation de monodromie géométrique

$$\rho_{\bar{x}}^{\text{geo}} : \pi_1(\check{\mathcal{M}}^{\text{an}} \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \bar{x}) \longrightarrow G^{\text{der}}(\mathbb{Z}_p)$$

sur le module de Tate de la déformation universelle spécialisée en  $\bar{x}$  est surjective.

Dans un travail récent de Shen [She], il montre que si les polygones de Hodge et de Newton se touchent en un point de rupture du polygone de Newton, alors la représentation de monodromie se factorise par un sous-groupe parabolique en utilisant la théorie de la filtration de Harder-Narasimhan des schémas en groupes finis et plats. Cela confirme que l'hypothèse du Théorème A concernant les polygones de Hodge et de Newton est bien nécessaire.

De ce théorème, on déduit le résultat suivant.

**Théorème B (6.3.1).** On réserve les hypothèses du théorème A. Alors

- (1) Les fibres géométriques du morphisme déterminant

$$\check{\mathcal{M}}_K \longrightarrow \check{\mathcal{M}}(D, \det \tilde{\mu})_{\det K}$$

sont les composantes connexes géométriques de  $\check{\mathcal{M}}_K$ .

- (2) Le morphisme déterminant induit des bijections compatibles lorsque  $K$  varie

$$\pi_0(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p) \xrightarrow{\sim} D(\mathbb{Q}_p) / \det K.$$

L'action de  $(g_1, g_2) \in J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p)$  sur les composantes connexes géométriques est donnée sur  $D(\mathbb{Q}_p) / \det K$  par la translation par  $\det(g_1) \det(g_2)$ . L'action de  $\gamma \in I_E$  sur les composantes connexes géométriques est donnée par la translation par  $\chi_{\det \tilde{\mu}}(\gamma)$ .

On donne une traduction cohomologique du théorème précédent. Dans le cadre des espaces analytiques de Berkovich, il n'y a pas de bonne notion de cohomologie étale  $\ell$ -adique sans support pour les espaces de Rapoport-Zink. Ainsi on ne peut pas traduire le théorème précédent en termes de  $H^0$ . On pourrait définir un  $H^0$  de manière ad-hoc en posant  $H^0(X, \mathbb{Q}_p) = \mathbb{Q}_\ell^{\pi_0(X)}$ , mais dans le cas de l'espace de Rapoport-Zink  $X = \check{\mathcal{M}}^{an}$ , l'action du groupe  $J(\mathbb{Q}_p)$  sur ce groupe ne serait pas lisse. On utilise plutôt le point de vue de [Far04]. Soit  $d := \dim \check{\mathcal{M}}^{an}$ . Bien qu'on ne puisse définir un bon  $H^0$ , on peut définir  $H_c^{2d}$  qui joue le rôle du dual de Poincaré du  $H^0$ , même si ce dernier n'existe pas. Soit donc  $H_c^{2d}(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$  la cohomologie étale  $\ell$ -adique à support compact de degré  $2d$  de l'espace analytique  $\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p$  à coefficient dans  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ . Le système projectif  $(H_c^{2d}(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell))_K$  est muni d'une action de  $J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p) \times W_E$ , où  $W_E$  est le groupe de Weil associé à  $E$ .

En utilisant le morphisme trace pour les espaces analytiques défini par Berkovich [Ber93] couplé avec les théorèmes précédents, on obtient le théorème suivant.

**Théorème (7.0.2).** *On réserve les hypothèses du théorème A. Soit  $\pi$  une  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible lisse de  $J(\mathbb{Q}_p)$ .*

- Si  $\pi = \chi \circ \det$  est le composé du morphisme déterminant avec un caractère de  $D(\mathbb{Q}_p)$

$$\pi : J(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\det} D(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\chi} \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times,$$

alors la représentation

$$(5) \quad \varinjlim_K \mathrm{Hom}_{J(\mathbb{Q}_p)}(H_c^{2d}(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell), \pi)$$

de  $G(\mathbb{Q}_p) \times W_E$  est le caractère suivant:

$$\begin{aligned} G(\mathbb{Q}_p) \times W_E &\rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times \\ (g, \gamma) &\mapsto \chi \circ \det(g) \cdot \chi \circ \tilde{\chi}_{\det} \tilde{\mu}(\gamma) \cdot \chi_{cycl}^d(\gamma) \end{aligned}$$

où  $\chi_{cycl}$  est le caractère cyclotomique et  $\tilde{\chi}_{\det} \tilde{\mu} : W_E \rightarrow D(\mathbb{Q}_p)$  est défini dans la remarque 1.2.2.

- si  $\pi \neq \chi \circ \det$ , alors (5) s'annule.

Le reste de cette introduction a pour objectif d'expliquer la stratégie de la démonstration du théorème A. Cette démonstration est analogue à celle de de Jong dans le cas des espaces de Lubin-Tate ([dJ95b]). On utilise en particulier les représentations de monodromie du groupe fondamental "étendu" qu'il a construites sur l'espace des périodes couplées avec une étude sur le groupe de Mumford-Tate  $p$ -adique générique (dans le cas des espaces de Lubin-Tate ce dernier résultat est facile d'après Serre ([Ser67])).

L'étude du groupe de Mumford-Tate  $p$ -adique générique marche en fait dans un cadre plus général que précédent en ne considérant pas seulement des données de Rapoport-Zink associées à des groupes  $p$ -divisibles. Soient  $G$  un groupe réductif non-ramifié sur  $\mathbb{Q}_p$  et  $(\bar{b}, \bar{\mu})$  un couple avec  $\bar{b}$  la classe de  $\sigma$ -conjugaison de  $b \in G(W(\overline{\mathbb{F}}_p)_\mathbb{Q})$  et  $\bar{\mu}$  la classe de conjugaison d'un cocaractère de  $G$ . Supposons de plus que  $\bar{b}$  est dans l'ensemble de Kottwitz  $B(G, \bar{\mu})$  (cf. [Kot97] section 6). Ici, on ne demande pas que  $G$  soit un groupe classique. On ne demande pas non plus que  $\bar{\mu}$  soit minuscule. Soit  $E \subset \overline{\mathbb{Q}}_p$  le corps de définition de  $\bar{\mu}$ . On associe une variété de drapeaux  $\mathcal{F}$  à  $\bar{\mu}$  sur  $E$ . Rapoport et Zink ont défini dans [RZ96] chapitre 1 un ouvert faiblement admissible  $\check{\mathcal{F}}^{fa}$  dans l'espace analytique de Berkovich  $\check{\mathcal{F}}^{an}$  associé à  $\mathcal{F}$  sur  $\check{E}$ . Si  $K|\check{E}$  est une extension de degré fini et  $x \in \check{\mathcal{F}}^{fa}(K)$ , grâce à la théorie de Fontaine et à la trivialité du torseur des périodes, il lui est associé une représentation  $p$ -adique cristalline

$$\xi_x : \mathrm{Gal}(\overline{\check{E}}|K) \rightarrow G(\mathbb{Q}_p)$$

bien définie à  $G(\mathbb{Q}_p)$ -conjugaison près.

**Théorème C** (5.0.6). Supposons que les polygones de Hodge et de Newton associés à  $\bar{\mu}$  et  $\bar{b}$  dans la chambre de Weyl positive ne se touchent pas en dehors de leurs extrémités (cf. définition 5.0.4). Supposons  $b$  décent. Soient  $K|\check{E}$  une extension de degré fini et  $x \in \mathcal{F}(K)$  qui est un point générique de  $\mathcal{F}$ . Alors,  $x \in \check{\mathcal{F}}^{fa}(K)$  et l'image de la représentation cristalline

$$\xi_x : \text{Gal}(\bar{E}|K) \longrightarrow G(\mathbb{Q}_p)$$

contient un sous-groupe ouvert de  $G^{der}(\mathbb{Q}_p)$ .

L'énoncé précédent est un ingrédient clé de la preuve du théorème A qui nous permet de déduire que l'image de la représentation de monodromie géométrique est ouverte.

L'argument clé de la preuve du théorème C est l'utilisation du groupe de Mumford-Tate. Soit  $x \in \check{\mathcal{F}}(K)$ . Il correspond à un sous-groupe parabolique  $P_\mu$  de  $G_K$  associé à un cocaractère  $\mu : \mathbb{G}_m \rightarrow G_K$  avec  $\mu \in \bar{\mu}$ . Supposons de plus que  $x \in \check{\mathcal{F}}^{fa}(K)$ . On peut lui associer deux groupes algébriques du type Mumford-Tate correspondant aux deux facettes de la théorie de Fontaine: étale et cristallin. Le premier,  $MT_{b,\mu}$ , est l'enveloppe algébrique de l'image de  $\xi_x$ . D'après Sen [Sen73], l'algèbre de Lie de l'image de  $\xi_x$  est algébrique et donc l'image de  $\xi_x$  est un sous-groupe ouvert de  $MT_{b,\mu}(\mathbb{Q}_p) \subset G(\mathbb{Q}_p)$ . Au point  $x$  est associé canoniquement un cocaractère  $\mu_x^{HT} : \mathbb{G}_m \rightarrow G_{\mathbb{C}_p}$  donnant la décomposition de Hodge-Tate de  $\xi_x$  et conjugué à  $\mu$ . La composante neutre de  $MT_{b,\mu}$  est alors le plus petit sous-groupe de  $G$  sur  $\mathbb{Q}_p$  contenant l'image de  $\mu_x^{HT}$ . Le deuxième groupe est le groupe de Mumford-Tate cristallin  $MT_{b,\mu}^{cris}$  qui se calcule en termes du  $\varphi$ -module filtré avec  $G$ -structure associé à  $(b, \mu)$ . La théorie de Fontaine, qui fournit un dictionnaire entre représentations galoisiennes et  $\varphi$ -modules filtrés, et la théorie des catégories Tannakiennes montrent que  $MT_{b,\mu}$  et  $MT_{b,\mu}^{cris}$  sont formes intérieures l'un de l'autre. Pour montrer que  $MT_{b,\mu}$  est aussi gros que possible, il suffit donc de le faire pour  $MT_{b,\mu}^{cris}$ . Or,  $MT_{b,\mu}^{cris}$  se calcule en termes de "cycles de Hodge cristallins". Par des arguments de théorie des représentations, on montre alors que pour la filtration générique  $MT_{b,\mu}^{cris}$  est aussi grosse que possible.

La structure de cet article est comme suit. La section 1 contient des rappels sur les espaces de Rapoport-Zink, le morphisme déterminant, les espaces de périodes et les représentations de monodromie. Les sections 2-5 sont consacré à la preuve du théorème C. Plus précisément, dans la section 2, on montre que  $\check{E}|E$  est de degré de transcendance infini (proposition 2.0.3) qui assure que l'énoncé du théorème C soit non-vide. Dans la section 3, au couple  $(b, \mu)$ , on définit le groupe de Mumford-Tate étale  $MT_{b,\mu}$  et le groupe cristallin  $MT_{b,\mu}^{cris}$  en rappelant la théorie de Fontaine et la théorie de Sen. On donne aussi une description de  $MT_{b,\mu}^{cris}$  (proposition 3.3.6) qu'on utilise dans la preuve du théorème C pour calculer  $MT_{b,\mu}^{cris}$  lorsque  $\mu$  est "générique". Dans la section 4, on étudie la filtration générique associé à  $\mu$  d'une représentation de  $G$  en termes de plus haut poids (proposition 4.3.2). Cela servira comme l'outil principal du calcul du groupe de Mumford-Tate cristallin générique. La section 5 contient la preuve du théorème C. Dans la section 6, les résultats principaux: théorèmes A et B seront démontrés. La section 7 s'agit de l'application cohomologique (théorème 7.0.2).

*Remerciement.* Cet article fait partie de ma thèse sous la direction de Laurent Fargues. Je voudrais lui exprimer ma gratitude au fond du coeur pour son aide constant et sa patience pertinente. Je voudrais aussi remercier Alain Genestier, Matthias Strauch, Eva Viehmann pour m'avoir donné leur remarques sur une version préliminaire de ma thèse. Mes remerciements vont également à Arno Kret qui m'a gentiment communiqué une autre preuve de la proposition 2.0.3. Je remercie enfin le rapporteur pour les commentaires soigneux et utiles.

1. ESPACES DE RAPOPORT-ZINK, MORPHISME DÉTERMINANT ET REPRÉSENTATION DE MONODROMIE

Rappelons que  $W = W(\overline{\mathbb{F}}_p)$ . Notons  $L = W \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  le complété  $p$ -adique de l'extension maximale non ramifiée de  $\mathbb{Q}_p$  dans  $\overline{\mathbb{Q}}_p$ . L'automorphisme  $\sigma$  est le Frobenius de l'extension  $L|\mathbb{Q}_p$ .

**1.1. Espaces de Rapoport-Zink.** Rappelons tout d'abord la définition suivante due à Kottwitz.

**Définition 1.1.1** ([Kot85]). Soit  $H$  un groupe algébrique sur  $\mathbb{Q}_p$ . On désigne par  $B(H)$  l'ensemble des classes de  $\sigma$ -conjugaison dans  $H(L)$ , où deux éléments  $b_1, b_2 \in H(L)$  sont dits  $\sigma$ -conjugués s'il existe un  $g \in H(L)$  tel que  $b_1 = g^{-1}b_2\sigma(g)$ . Pour  $b \in H(L)$ , on notera  $\bar{b} \in B(H)$  sa classe de  $\sigma$ -conjugaison.

Un espace de Rapoport-Zink est défini à partir d'une donnée de Rapoport-Zink. On commence par le cas EL, i.e., le cas des groupes linéaires.

**Définition 1.1.2.** Une donnée locale de Rapoport-Zink de type EL non ramifiée simple  $(F, V, \bar{b}, \bar{\mu})$  consiste en la donnée

- d'une extension finie non ramifiée  $F$  de  $\mathbb{Q}_p$ ,
- d'un  $F$ -espace vectoriel  $V$  de dimension  $n < +\infty$ ,
- d'une classe de  $\sigma$ -conjugaison  $\bar{b} \in B(G)$  avec  $G = \text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \text{GL}_F(V)$ ,
- d'une classe de conjugaison  $\bar{\mu}$  d'un cocaractère minuscule  $\mu : \mathbb{G}_{m/\overline{\mathbb{Q}}_p} \rightarrow G_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$  au sens suivant: on peut choisir une base de  $V$  telle que

$$\begin{array}{ccc} \mu : \mathbb{G}_{m, \overline{\mathbb{Q}}_p} & \longrightarrow & G_{\overline{\mathbb{Q}}_p} \xrightarrow{\sim} \prod_{\tau \in \tilde{I}_F} \text{GL}_{n, \overline{\mathbb{Q}}_p} \\ z & \longrightarrow & \prod_{\tau \in \tilde{I}_F} \text{diag}(\underbrace{z, \dots, z}_{q_\tau}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p_\tau}) \end{array}$$

où  $\tilde{I}_F = \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(F, \overline{\mathbb{Q}}_p)$  et  $(p_\tau, q_\tau)_{\tau \in \tilde{I}_F}$  est une collection d'entiers satisfaisant  $p_\tau + q_\tau = n$ .

On suppose de plus que ces données sont liées entre elles par la relation  $\bar{b} \in B(G, \mu)$ , où  $B(G, \mu) \subset B(G)$  est l'ensemble de Kottwitz (cf. [Kot97] section 6). Notons  $E$  le corps reflex associé, i.e., le corps de définition de  $\bar{\mu}$ .

Étant donnée une donnée locale de type EL non ramifiée simple  $(F, V, \bar{b}, \bar{\mu})$ , l'espace de modules est défini comme suit:

**Définition 1.1.3.** Soit  $\mathbb{X}$  un groupe  $p$ -divisible sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  muni d'une action de  $\mathcal{O}_F$  et d'isocrystal covariant muni de son action de  $F$  égal à  $(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} L, b\sigma)$ . Nous noterons  $\check{\mathcal{M}}(G, b, \mu)/\text{Spf}(\mathcal{O}_{\check{E}})$  l'espace de Rapoport-Zink associé, où  $\check{E} = \widehat{E^{\text{nr}}}$  est le complété  $p$ -adique de l'extension maximale non ramifiée de  $E$  dans  $\overline{\mathbb{Q}}_p$ . C'est un espace de modules de groupes  $p$ -divisibles munis d'une action de  $\mathcal{O}_F$ . Pour un  $\text{Spf}(\mathcal{O}_{\check{E}})$ -schéma  $S$  sur lequel  $p$  est localement nilpotent, un  $S$ -point de  $\check{\mathcal{M}}(G, b, \mu)$  est une classe d'isomorphisme de couples  $(X, \rho)$ , où

- $X$  est un groupe  $p$ -divisible défini sur  $S$  muni d'une action de  $\mathcal{O}_F$  vérifiant la condition suivante: si

$$\text{Lie}(X) = \bigoplus_{\tau \in \tilde{I}_F} \text{Lie}(X)_\tau$$

est la décomposition de  $\text{Lie}(X)$  suivant l'action de  $\mathcal{O}_F$ , alors pour tout  $\tau \in \tilde{I}_F$ ,  $\text{Lie}(X)_\tau$  est localement libre de rang  $p_\tau$ .

- $\rho : \mathbb{X} \times_{\overline{\mathbb{F}}_p} (S \bmod p) \rightarrow X \times_S (S \bmod p)$  est une quasi-isogénie compatible à l'action de  $\mathcal{O}_F$ .

*Remarque 1.1.4.* L'espace  $\check{\mathcal{M}}(G, b, \mu)$  ne dépend que de  $\bar{b}$  et  $\bar{\mu}$ .

De même, un espace de Rapoport-Zink non-ramifié de type PEL symplectique ou unitaire est défini à partir d'une donnée de Rapoport-Zink de type PEL non-ramifiée simple  $(F, *, V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \bar{b}, \bar{\mu})$  vérifiant certaines conditions, où  $(F, V)$  est le même que le cas EL,  $*$  est une involution de  $F$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{Q}_p$  est un produit hermitien symplectique tel qu'il existe un réseau autodual dans  $V$  pour ce produit symplectique, et  $(\bar{b}, \bar{\mu})$  est défini comme le cas EL avec  $G$  est soit  $\mathrm{GU}(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  le groupe de similitudes unitaire si l'involution n'est pas triviale, soit  $\mathrm{GSp}(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  le groupe de similitudes symplectique si l'involution est triviale. On suppose de plus que  $V$  possède un réseau autodual pour le produit symplectique. Notons encore  $E$  le corps reflex associé et  $\check{E} = \widehat{E^{nr}}$ . L'espace de Rapoport-Zink associé  $\check{\mathcal{M}}(G, b, \mu)$  est un espace de modules paramétrisant les classes d'équivalence de triplets  $(X, \rho, \lambda')$  avec  $(X, \rho)$  comme dans le cas EL et  $\lambda' : X \rightarrow X^\vee$  une polarization principale compatible avec  $\rho$  et l'action de  $\mathcal{O}_F$ . Deux triplets  $(X_1, \rho_1, \lambda_1)$  et  $(X_2, \rho_2, \lambda_2)$  sont équivalents s'il existe un isomorphisme entre  $(X_1, \rho_1)$  et  $(X_2, \rho_2)$  via lequel  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  diffèrent d'une unité dans  $\mathbb{Z}_p^\times$ . Pour la définition précise, on renvoie à [RZ96] ou [Che13] sections 2.3 et 2.4.

Dans tous les cas EL et PEL, fixons un réseau  $\Lambda_0$  (autodual dans le cas PEL) dans l'espace vectoriel  $V$ . On note encore  $G$  pour le modèle entier réductif de  $G$  associé à ce réseau. L'espace  $\check{\mathcal{M}} = \check{\mathcal{M}}(G, b, \mu)$  est déterminé par le triplet  $(G, b, \mu)$  obtenu par la donnée de Rapoport-Zink. Rapoport et Zink ont montré dans [RZ96] que  $\check{\mathcal{M}}$  est représentable par un schéma formel localement formellement de type fini sur  $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\check{E}})$ . D'après la théorie de déformation de Grothendieck-Messing,  $\check{\mathcal{M}}$  est formellement lisse.

L'espace  $\check{\mathcal{M}}$  est muni de plusieurs structures (cf. [RZ96] chapitre 3):

- une application localement constante  $\varkappa : \check{\mathcal{M}} \rightarrow \Delta := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_{\mathbb{Q}_p}^*, \mathbb{Z})$  où  $X_{\mathbb{Q}_p}^*(G)$  est le groupe des caractères  $\mathbb{Q}_p$ -rationnels de  $G$ . En effet  $\Delta \simeq \mathbb{Z}$  dans notre situation et  $\varkappa$  est l'hauteur de la quasi-isogénie à un scalaire près.
- une action à gauche du groupe  $J(\mathbb{Q}_p)$ , où  $J$  est un groupe réductif sur  $\mathbb{Q}_p$  déterminé par  $b$  tel que pour tout  $\mathbb{Q}_p$ -algèbre  $R$ ,

$$J(R) = \{g \in G(R \otimes_{\mathbb{Q}_p} L), g(b\sigma) = (b\sigma)g\}.$$

En effet,  $J$  est une forme intérieure d'un sous-groupe de Levi de  $G$ .

- une donnée de descente de Rapoport-Zink  $\check{\mathcal{M}} \xrightarrow{\sim} \sigma_E^* \check{\mathcal{M}}$  par rapport à l'extension  $\check{E}|E$ , où  $\sigma_E$  est le Frobenius de  $\check{E}|E$ .

**Définition 1.1.5.** • On désigne par  $\check{\mathcal{M}}^{an}$  la fibre générique de  $\check{\mathcal{M}}$  sur  $\check{E}$  au sens des espaces analytiques de Berkovich.

- Pour  $K \subset G(\mathbb{Z}_p)$  un sous-groupe ouvert, on désigne par  $\check{\mathcal{M}}_K$  l'espace analytique de Berkovich qui classifie les structures de niveau  $K$  sur  $T_p(X^{univ})$ , le module de Tate du groupe  $p$ -divisible universel.

La collection  $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$  forme une tour de revêtements étales finis au-dessus de  $\check{\mathcal{M}}^{an}$  munie d'une action à droite de  $G(\mathbb{Q}_p)$ . Plus précisément, pour un sous-groupe ouvert  $K \subset G(\mathbb{Z}_p)$  et  $g \in G(\mathbb{Q}_p)$  tels que  $g^{-1}Kg \subset G(\mathbb{Z}_p)$ , on a un isomorphisme  $g : \check{\mathcal{M}}_K \xrightarrow{\sim} \check{\mathcal{M}}_{g^{-1}Kg}$ . (cf. [RZ96] 5.34 ou [Far04] 2.3.9.3). L'action de  $J(\mathbb{Q}_p)$  sur  $\check{\mathcal{M}}^{an}$  s'étend à  $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$  et commute à celle de  $G(\mathbb{Q}_p)$ . La donnée de descente de Rapoport-Zink pour  $\check{\mathcal{M}}$  induit aussi une donnée de descente de Rapoport-Zink pour la tour  $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$ .

Pour étudier l'ensemble des composantes connexes géométriques de la tour  $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$ , on voudrait utiliser le morphisme déterminant défini sur cette tour  $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$ . Avant de rappeler le

morphisme déterminant, on devrait d'abord rappeler le but de ce morphisme. Il s'agit d'une tour d'espaces analytique de Berkovich de dimension 0 étale sur  $\check{E}$  qui sont appelés espaces de Rapoport-Zink toriques.

**1.2. Espaces de Rapoport-Zink toriques et morphisme déterminant.** Soient  $(G, b, \mu)$  comme précédemment,  $D = G/G^{der}$  l'abélianisé de  $G$ , qui est un tore  $p$ -adique non-ramifié, et  $\det : G \rightarrow D$  la projection. À cause de la normalisation du Frobenius et de la filtration de Hodge des modules de Dieudonné covariants, on utilise plutôt dans la suite la donnée  $(p^{-1}b, \tilde{\mu})$ , où  $\tilde{\mu} := \nu_G \cdot \mu$  avec  $\nu_G : \mathbb{G}_m \rightarrow G$  le cocaractère central  $z \mapsto z^{-1} \text{Id}$ . Cette donnée induit une nouvelle donnée  $(D, \det \tilde{\mu})$ . À cette donnée on peut associer une tour d'espaces de Rapoport-Zink toriques définis comme suit:

**Définition 1.2.1.** Fixons une clôture algébrique  $\overline{E}$  de  $\check{E}$ . Soit  $K$  un sous-groupe compact ouvert de  $D(\mathbb{Q}_p)$ , On note  $\check{\mathcal{M}}(D, \det \tilde{\mu})_K$  l'unique espace analytique de Berkovich de dimension 0 étale sur  $\check{E}$  tel que  $\check{\mathcal{M}}(D, \det \tilde{\mu})(\overline{E}) = D(\mathbb{Q}_p)/K$  et l'action du groupe d'inertie  $I_E = \text{Gal}(\overline{E}|\check{E})$  soit donnée par: si  $\gamma \in I_E$  alors  $\gamma(xK) = \chi_{\det \tilde{\mu}}(\gamma)xK$  pour tous  $x \in D(\mathbb{Q}_p)$ , où

$$\chi_{\det \tilde{\mu}} : I_E \xrightarrow{\text{rec}_E^{-1}} \mathcal{O}_E^\times \xrightarrow{N_{\det \tilde{\mu}}} D(\mathbb{Q}_p)$$

est le morphisme composé de  $\text{rec}_E^{-1}$ , l'inverse de l'application de réciprocity d'Artin du corps  $E$ , avec un analogue  $p$ -adique de de la norme reflex en théorie de la multiplication complexe  $N_{\det \tilde{\mu}}$  qui est le composé:

$$N_{\det \tilde{\mu}} : E^\times \xrightarrow{\det \tilde{\mu}} D(E^\times) \xrightarrow{N_{E/\mathbb{Q}_p}} D(\mathbb{Q}_p).$$

*Remarque 1.2.2.* L'homomorphisme  $\chi_{\det \tilde{\mu}} : I_E \rightarrow D(\mathbb{Q}_p)$  prolonge en  $\tilde{\chi}_{\det \tilde{\mu}} : W_E \rightarrow D(\mathbb{Q}_p)$  avec  $W_E$  le groupe de Weil de  $E$ , car  $\text{rec}_E^{-1} : I_E \rightarrow \mathcal{O}_E^\times$  peut être étendu au groupe de Weil  $\text{rec}_E^{-1} : W_E \rightarrow E^\times$ .

Comme les espaces de Rapoport-Zink, la tour d'espaces de Rapoport-Zink torique  $(\check{\mathcal{M}}(D, \det \tilde{\mu})_K)_K$  est munie de plusieurs structures:

- une action de  $D(\mathbb{Q}_p) \times D(\mathbb{Q}_p)$ . Pour  $(a, b) \in D(\mathbb{Q}_p) \times D(\mathbb{Q}_p)$ , on a l'application

$$(a, b) : \check{\mathcal{M}}(D, \det \tilde{\mu})_K \rightarrow \check{\mathcal{M}}(D, \det \tilde{\mu})_K$$

donnée par  $(a, b)xK = abxK$  pour  $xK \in D(\mathbb{Q}_p)/K$ .

- un morphisme d'espaces analytiques de Berkovich

$$\varkappa : \check{\mathcal{M}}(D, \det \tilde{\mu})_K \rightarrow \Delta = \text{Hom}(X_{\mathbb{Q}_p}^*(D), \mathbb{Z})$$

donné par l'application  $I_E$ -invariante:

$$\begin{aligned} \varkappa : D(\mathbb{Q}_p)/K &\longrightarrow \Delta \\ xK &\longmapsto [\chi \mapsto v_p(\chi(x))] \end{aligned}$$

- une donnée de descente  $\check{\mathcal{M}}(D, \det \tilde{\mu})_K \xrightarrow{\sim} \sigma_E^* \check{\mathcal{M}}(D, \det \tilde{\mu})_K$  par rapport à  $\check{E}|E$ . Cela correspond à l'homomorphisme  $\tilde{\chi}_{\det \tilde{\mu}} : W_E \rightarrow D(\mathbb{Q}_p)$ .

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de l'existence du morphisme déterminant:

**Théorème 1.2.3** ([Che13] Théorèmes 4.1, 5.1 et 5.5). *Via le morphisme  $(\det, \det) : J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p) \rightarrow D(\mathbb{Q}_p) \times D(\mathbb{Q}_p)$  il existe un morphisme  $J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant de tours d'espaces analytiques de Berkovich*

$$\det_K : (\check{\mathcal{M}}(G, b, \mu)_K)_K \longrightarrow (\check{\mathcal{M}}(D, \det \tilde{\mu})_{\det K})_K$$

où  $K$  parcourt les sous-groupes ouverts de  $G(\mathbb{Z}_p)$ . De plus, ce morphisme est compatible au morphisme  $\varkappa$  et à la donnée de descente de Rapoport-Zink.

**1.3. Morphisme de périodes et représentation de monodromie.** Fixons un point géométrique  $\bar{x}$  de  $\check{\mathcal{M}}^{an}$ , le  $\mathbb{Z}_p$ -système local défini par le module de Tate du groupe  $p$ -divisible universel  $X^{\check{univ}}$  correspond à la représentation de monodromie:

$$\rho_{\bar{x}} : \pi_1(\check{\mathcal{M}}^{an}, \bar{x}) \rightarrow \text{Aut}(T_p(X_{\bar{x}}^{\check{univ}}))$$

où  $\pi_1(\check{\mathcal{M}}^{an}, \bar{x})$  est le groupe fondamentale algébrique de  $\check{\mathcal{M}}^{an}$  et  $\text{Aut}(T_p(X_{\bar{x}}^{\check{univ}}))$  est le groupe des automorphismes de  $T_p(X_{\bar{x}}^{\check{univ}})$  compatibles aux actions de  $\mathcal{O}_F$  et au produit symplectique dans le cas PEL. En fixant un isomorphisme  $\Lambda_0 \xrightarrow{\sim} T_p(X_{\bar{x}}^{\check{univ}})$  compatible aux structures additionnelles, on a un morphisme continu qu'on note encore par  $\rho_{\bar{x}}$ :

$$\rho_{\bar{x}} : \pi_1(\check{\mathcal{M}}^{an}, \bar{x}) \rightarrow G(\mathbb{Z}_p).$$

Soient  $\check{\mathcal{F}}$  l'espace homogène sous  $G_{\check{E}}$  associé des sous-groupes paraboliques de type  $\mu$  que l'on voit comme une variété algébrique sur  $\check{E}$ , et  $\check{\mathcal{F}}^{an}$  l'espace analytique de Berkovich sur  $\check{E}$  associé à  $\check{\mathcal{F}}$ . Soit

$$\check{\pi} : \check{\mathcal{M}}^{an} \rightarrow \check{\mathcal{F}}^{an}$$

le morphisme de périodes (cf. [RZ96] chapitre 5). Notons  $\check{\mathcal{F}}^a$  l'image de  $\check{\pi}$ , un ouvert de  $\check{\mathcal{F}}^{an}$  appelé ouvert admissible. Nous n'utiliserons en fait dans cet article que les points de  $\check{\mathcal{F}}^a$  à valeurs dans une extension finie de  $\check{E}$ . En particulier, nous n'utiliserons pas la structure d'espace analytique sur cet ouvert. De plus, d'après Colmez et Fontaine [CF00], de tels points coïncident avec les points à valeurs dans une extension finie de  $\check{E}$  de l'ouvert faiblement admissible  $\check{\mathcal{F}}^{fa}$  ([RZ96] chapitre 1 et [DRO10]), où  $\check{\mathcal{F}}^a \subset \check{\mathcal{F}}^{fa} \subset \check{\mathcal{F}}^{an}$ .

D'après de Jong [dJ95b], le  $\mathbb{Q}_p$ -système local défini par le module de Tate rationel universel sur  $\check{\mathcal{M}}^{an}$  descend en un  $\mathbb{Q}_p$ -système local sur  $\check{\mathcal{F}}^a$  que l'on note  $\mathcal{E}$ . On a alors un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1^{dJ}(\check{\mathcal{M}}^{an}, \bar{x}) & \longrightarrow & \pi_1(\check{\mathcal{M}}^{an}, \bar{x}) \longrightarrow G(\mathbb{Z}_p) \\ \check{\pi}_* \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1^{dJ}(\check{\mathcal{F}}^a, \bar{y}) & \longrightarrow & G(\mathbb{Q}_p) \end{array}$$

où  $\pi_1^{dJ}$  désigne le groupe fondamental qui classe les revêtements étales et le morphisme du bas correspond au  $\mathbb{Q}_p$ -système local  $\mathcal{E}$  sur  $\check{\mathcal{F}}^a$  d'après [dJ95b].

Rappelons les conséquences immédiates suivantes d'après l'existence du morphisme déterminant (théorème 1.2.3).

**Corollaire 1.3.1** ([Che13], Théorème 6.3). *Les composés*

$$\pi_1(\check{\mathcal{M}}^{an}, \bar{x}) \longrightarrow G(\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\det} D(\mathbb{Z}_p)$$

et

$$\pi_1^{dJ}(\check{\mathcal{F}}^a, \bar{y}) \longrightarrow G(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\det} D(\mathbb{Q}_p)$$

sont donnés via le morphisme canonique vers  $I_E$  par  $\chi_{\det} \bar{\mu} : I_E \rightarrow D(\mathbb{Z}_p)$ .

Notons  $\mathbb{C}_p$  le complété de  $\bar{E}$ . Regardons maintenant les représentations de monodromie géométriques.

**Corollaire 1.3.2** ([Che13], Corollaire 6.2).

- (1) Le morphisme  $\pi_1(\check{\mathcal{M}}^{an} \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \bar{x}) \longrightarrow G(\mathbb{Z}_p)$  est à valeurs dans  $G^{der}(\mathbb{Z}_p)$ .
- (2) Le morphisme  $\pi_1^{dJ}(\check{\mathcal{F}}^a \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \bar{y}) \longrightarrow G(\mathbb{Q}_p)$  est à valeurs dans  $G^{der}(\mathbb{Q}_p)$ .

## 2. EXISTENCE DE POINTS GÉNÉRIQUES SUR $\widehat{\mathbb{Q}_p^{nr}}$

Pour pouvoir appliquer le théorème 5.0.6 qui suit nous avons besoin de vérifier le résultat suivant.

**Proposition 2.0.3.** *Le corps  $\widehat{\mathbb{Q}_p^{nr}}$  est de degré de transcendance infini sur  $\mathbb{Q}_p$ .*

*Proof.* Pour  $i, j \in \mathbb{N}$ , posons  $N'_{ij} = (j^{i+1})!$  et

$$N_{ij} = \begin{cases} N'_{ij} & \text{si } j = n! \text{ pour un } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Pour  $i \in \mathbb{N}$ , choisissons

$$x_i = \sum_{j \geq 0} V^j[x_{ij}] \in W(\overline{\mathbb{F}_p})$$

tel que

- si  $N_{ij} \neq 0$ ,  $x_{ij}$  est un générateur de  $\mathbb{F}_{p^{N_{ij}}}^\times$ ,
- si  $N_{ij} = 0$ ,  $x_{ij} = 0$ .

On montre que la famille  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est algébriquement indépendante sur  $\mathbb{Q}_p$ .

Un élément  $\sum_{j \geq 0} V^j[y_j] \in W(\overline{\mathbb{F}_p})$  est algébrique sur  $\mathbb{Q}_p$  si et seulement s'il existe  $s \in \mathbb{N}$  tel que  $y_j \in \mathbb{F}_{p^s}$  pour tout  $j \in \mathbb{N}$ . L'élément  $x_0$  est donc transcendant sur  $\mathbb{Q}_p$ .

Supposons maintenant que  $x_0, \dots, x_{i-1}$  sont algébriquement indépendants sur  $\mathbb{Q}_p$ , on veut montrer que  $x_0, \dots, x_i$  le sont aussi. Soit une relation

$$a_m x_i^m + a_{m-1} x_i^{m-1} + \dots + a_1 x_i + a_0 = 0$$

avec  $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{Z}_p[x_0, \dots, x_{i-1}]$  et  $m > 0$ . Il suffit de montrer que  $a_m = 0$ . Soient  $a_k = \sum_{s \geq 0} V^s[a_{ks}]$  pour  $k = 0, \dots, m$ . Supposons par l'absurde que  $a_m \neq 0$  et soit  $r$  le plus petit entier tel que  $a_{m,r} \neq 0$ .

Remarquons que

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{b^{i+1}!}{p^{b(m-1)} \cdot (bm+r)^i!} &= +\infty \\ \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{(b^{i+1})!}{p^{b(m-1)} \cdot (b-1)^{i+1}!} &= +\infty. \end{aligned}$$

Choisissons alors  $b \in \mathbb{N}$  tel que  $b$  soit de la forme  $n!$  avec  $(n+1)! > m \cdot n! + r$ ,

$$b^{i+1}! > p^{b(m-1)} m \cdot (bm+r)^i! \quad \text{et} \quad (b^{i+1})! > p^{b(m-1)} m \cdot (b-1)^{i+1}!$$

On a donc

- $x_{ib} \neq 0$  et  $x_{ij} = 0$  pour  $j = b+1, \dots, bm+r$ ,
- $N_{i,b} > p^{b(m-1)} m \cdot \max(N'_{i-1, bm+r}, N'_{i, b-1})$ .

Posons

$$n_0 := bm+r \quad \text{et} \quad M = \max(N'_{i-1, bm+r}, N'_{i, b-1}).$$

De l'inégalité  $M \geq N'_{i, b-1}$  on tire que pour tout  $t$ ,  $0 \leq t \leq b-1$ , on a  $x_{i,t} \in \mathbb{F}_{p^M}$ . C'est-à-dire  $x_i \bmod p^b \in W_b(\mathbb{F}_{p^M})$ . De l'inégalité  $M \geq N'_{i-1, n_0}$  et de ce que  $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{Z}_p[x_0, \dots, x_{i-1}]$ , on tire que

$$\text{pour } 0 \leq k \leq m, \quad 0 \leq t \leq n_0, \quad a_{k,t} \in \mathbb{F}_{p^M}$$

c'est à dire

$$\text{pour } 0 \leq k \leq m, \quad a_k \bmod p^{n_0+1} \in W_{n_0+1}(\mathbb{F}_{p^M}).$$

D'après le lemme 2.0.4 qui suit,

$$a_m x_i^m + a_{m-1} x_i^{m-1} + \cdots + a_1 x_i + a_0 = \sum_{s \geq 0} V^s[z_s]$$

où  $z_{n_0}$  est un polynôme en  $x_{i,b}$  à coefficients dans  $\mathbb{F}_{p^M}$  de degré  $p^{n_0-b}m$  et de facteur dominant  $a_{m,r}^{p^{bm}} x_{i,b}^{p^{n_0-b}m}$ . Puisque  $x_{i,b}$  est un générateur de  $\mathbb{F}_{p^{N_{i,b}}}$  et que  $N_{i,b} > p^{n_0-b}mM$ , on en déduit que  $a_{m,r} = 0$ . C'est donc une contradiction.  $\square$

**Lemme 2.0.4.** Soient  $r \in \mathbb{N}$  et  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Posons

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{i \geq 0} V^i[X_i] \right)^m \cdot \left( \sum_{j \geq r} V^j[Y_{m,j}] \right) + \sum_{k=0}^{m-1} \left( \sum_{i \geq 0} V^i[X_i] \right)^k \cdot \left( \sum_{j \geq 0} V^j[Y_{k,j}] \right) \\ &= \sum_{s \geq 0} V^s[P_s] \in W(\mathbb{F}_p[X_i, Y_{k,j}]_{i,j,k \geq 0}). \end{aligned}$$

Alors pour tout  $b \in \mathbb{N}$ ,

- si  $s < bm + r$ ,  $\deg_{X_b}(P_s) < p^{s-b}m$ ;
- si  $s = bm + r$ ,  $\deg_{X_b}(P_s) = p^{s-b}m$ . De plus, le coefficient de  $X_b^{p^{s-b}m}$  dans  $P_s$  est  $Y_{m,r}^{p^{bm}}$ .

*Proof.* Puisque  $P_s$  est un polynôme en les  $(X_i, Y_{k,j})_{\substack{0 \leq i,j \leq s \\ 0 \leq k \leq m}}$ , le résultat est clair si  $s < b$  car alors  $\deg_{X_b}(P_s) = -\infty$ . On suppose donc dans la suite que  $b \leq s$ .

On raisonne par récurrence sur  $s$ . Lorsque  $s = 0$ ,

$$P_0 = \begin{cases} \sum_{k=0}^m X_0^k Y_{k,0} & r = 0 \\ \sum_{k=0}^{m-1} X_0^k Y_{k,0} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On en déduit le résultat dans ce cas là.

Supposons maintenant  $s > 0$ . Notons

$$\left( \sum_{i \geq 0} V^i[X_i] \right)^m \cdot \left( \sum_{j \geq r} V^j[Y_{m,j}] \right) + \sum_{k=0}^{m-1} \left( \sum_{i \geq 0} V^i[X_i] \right)^k \cdot \left( \sum_{j \geq 0} V^j[Y_{k,j}] \right) = \sum_{s \geq 0} V^s[Q_s]$$

dans  $W(\mathbb{Z}[X_i, Y_j]_{i,j,k \geq 0})$ . Pour tout  $s$ , le polynôme  $P_s$  est donc la réduction modulo  $p$  de  $Q_s$ . Appliquant le  $s$ -ième polynôme de Witt à cette égalité on obtient

$$\left( \sum_{i=0}^s p^i X_i^{p^{s-i}} \right)^m \left( \sum_{j=r}^s p^j Y_{m,j}^{p^{s-j}} \right) + \sum_{k=0}^{m-1} \left( \sum_{i=0}^s p^i X_i^{p^{s-i}} \right)^k \left( \sum_{j=0}^s p^j Y_{k,j}^{p^{s-j}} \right) = \sum_{t=0}^s p^t Q_t^{p^{s-t}}$$

où si  $r > s$ , la somme  $\sum_{j=r}^s p^j Y_{m,j}^{p^{s-j}}$  est par définition 0. On a donc

$$(p^b X_b^{p^{s-b}} + \alpha)^m p^r \beta + \sum_{k=0}^{m-1} \left( \sum_{i=0}^s p^i X_i^{p^{s-i}} \right)^k \left( \sum_{j=0}^s p^j Y_{k,j}^{p^{s-j}} \right) = \sum_{t=0}^s p^t Q_t^{p^{s-t}}$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des polynômes ne contenant pas la variable  $X_b$ . Si  $s < bm + r$  on a donc

$$(6) \quad \deg_{X_b} \left( \sum_{t=0}^s p^t Q_t^{p^{s-t}} \bmod p^{s+1} \right) < p^{s-b}m.$$

où

$$\sum_{t=0}^s p^t Q_t^{p^{s-t}} \bmod p^{s+1} \in (\mathbb{Z}/p^{s+1}\mathbb{Z})[X_i, Y_{k,j}]_{i,j,k \geq 0}.$$

D'autre part, d'après l'hypothèse de récurrence, pour tout  $t < s$ , on a  $\deg_{X_b}(P_t) < p^{t-b}m$  et donc

$$(7) \quad \deg_{X_b}(p^t Q_t^{p^{s-t}} \bmod p^{s+1}) < p^{s-b}m$$

car pour un polynôme  $f \in \mathbb{Z}[T]$  et  $a \in \mathbb{N}$ ,  $\deg(f^{p^a} \bmod p^{a+1}) = p^a \deg(f \bmod p)$ .

Combinant les relations (6) et (7) on obtient

$$(\deg_{X_b}(p^s Q_s \bmod p^{s+1}) < p^{s-b}m) \implies (\deg_{X_b} P_s < p^{s-b}m).$$

Si  $s = bm + r$ , alors

$$\deg_{X_b} \left( \left( \sum_{i=0}^s p^i X_i^{p^{s-i}} \right)^m \left( \sum_{j=r}^s p^j Y_{k,j}^{p^{s-j}} \right) + \sum_{k=0}^{m-1} \left( \sum_{i=0}^s p^i X_i^{p^{s-i}} \right)^k \left( \sum_{j \geq 0} p^j Y_{k,j}^{p^{s-j}} \right) \bmod p^{s+1} \right) = p^{s-b}m$$

et modulo  $p^{s+1}$ , le coefficient de  $X_b^{p^{s-b}m}$  dans ce polynôme produit est  $p^s Y_{m,r}^{p^{s-r}} = p^s Y_{m,r}^{p^{bm}}$ . D'autre part, pour  $k < s$  l'inégalité (7) est encore vérifiée grâce à l'hypothèse de récurrence. On obtient donc que

$$(\deg_{X_b}(p^s Q_s \bmod p^{s+1}) = p^{s-b}m) \implies (\deg_{X_b} P_s = p^{s-b}m).$$

De plus, le coefficient de  $X_b^{p^{s-b}m}$  dans  $p^s Q_s$  est  $p^s Y_{m,r}^{p^{bm}}$  et donc le coefficient de  $X_b^{p^{s-b}m}$  dans  $P_s$  est  $Y_{m,r}^{p^{bm}}$ .  $\square$

### 3. LE GROUPE DE MUMFORD-TATE $p$ -ADIQUE

**3.1. Rappels sur la catégorie Tannakienne des représentations cristallines.** Soient  $K$  un corps de valuation discrète extension de  $\mathbb{Q}_p$  à corps résiduel  $k$  parfait, et  $K_0 = \text{Frac}(W(k))$ . Désignons par  $\sigma$  le Frobenius de  $k$  et de  $K_0$ . On fixe une clôture algébrique  $\bar{K}$  de  $K$  et on note  $\Gamma_K = \text{Gal}(\bar{K}/K)$ .

On rappelle la définition d'un isocrystal filtré ainsi que la définition d'un isocrystal filtré faiblement admissible (cf. [Fon94]) que Fontaine appelle  $\varphi$ -modules filtrés et  $\varphi$ -modules filtrés faiblement admissibles respectivement.

**Définition 3.1.1.** Un *isocrystal filtré* sur  $K/K_0$  est un triplet  $D = (N, \varphi, \text{Fil}^\bullet N_K)$ , où

- $N = (N, \varphi)$  est un isocrystal sur  $k$ ,
- $\text{Fil}^\bullet N_K$  est une  $\mathbb{Z}$ -filtration décroissante de  $N_K := N \otimes_{K_0} K$  par des sous- $K$ -espaces vectoriels telle que  $\text{Fil}^i N_K = N_K$  pour  $i \ll 0$  et  $\text{Fil}^i N_K = 0$  pour  $i \gg 0$ .

La catégorie des isocristaux filtrés sur  $K/K_0$  est notée  $\text{IsocFil}_{K/K_0}$ . C'est une catégorie additive  $\mathbb{Q}_p$ -linéaire exacte quasi-abélienne.

**Définition 3.1.2** (Fontaine). Pour tout isocrystal filtré  $D = (N, \varphi, \text{Fil}^\bullet N_K)$ , on définit

$$t_N(D) = v_p(\det \varphi) \in \mathbb{Z}$$

$$t_H(D) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} i \cdot \dim_K \text{gr}^i(N_K) \in \mathbb{Z}.$$

Un isocrystal filtré  $D$  est dit *faiblement admissible* si  $t_N(D) = t_H(D)$ , et pour tout sous-objet strict  $D'$  de  $D$  dans  $\text{IsocFil}_{K/K_0}$ ,  $t_N(D') \geq t_H(D')$ .

La sous-catégorie pleine des isocristaux filtrés faiblement admissibles sur  $K/K_0$  est désignée par  $\text{IsocFil}_{K/K_0}^{\text{ad}}$ . C'est une catégorie abélienne. Le produit tensoriel de deux isocristaux filtrés faiblement admissibles l'est aussi grâce à Faltings ([Fal95]) et Totaro ([Tot96] théorème 1).

Donc,  $\text{IsocFil}_{K/K_0}^{\text{ad}}$  est une catégorie tannakienne  $\mathbb{Q}_p$ -linéaire ([Del90] 2.8) avec comme foncteur fibre naturel sur  $K_0$ :

$$\begin{aligned}\omega' : \text{IsocFil}_{K/K_0}^{\text{ad}} &\longrightarrow \text{Vect}_{K_0} \\ (N, \varphi, \text{Fil}^\bullet N_K) &\longmapsto N\end{aligned}$$

où  $\text{Vect}_{K_0}$  est la catégorie des  $K_0$ -espaces vectoriels de dimension finie.

D'après Colmez et Fontaine ([CF00]), faiblement admissible est équivalent à admissible. On a donc une équivalence de catégories de Fontaine:

$$\begin{aligned}\mathbb{D}_{\text{cris}} : \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{cris}}(\Gamma_K) &\xrightarrow{\sim} \text{IsocFil}_{K/K_0}^{\text{ad}} \\ V &\longmapsto ((V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\text{cris}})^{\Gamma_K}, \text{Id} \otimes \varphi, \text{Fil}^\bullet)\end{aligned}$$

où

- $\text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{cris}}(\Gamma_K)$  est la catégorie des représentations  $p$ -adiques cristallines de  $\Gamma_K$ ,
- $B_{\text{cris}}$  désigne  $B_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ ,
- la filtration  $\text{Fil}^\bullet$  est obtenue à partir du plongement

$$(V \otimes B_{\text{cris}})^{\Gamma_K} \otimes_{K_0} K \hookrightarrow V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{dR}$$

et de la filtration  $V \otimes \text{Fil}^\bullet B_{dR}$ .

L'équivalence inverse est donnée par

$$\begin{aligned}V_{\text{cris}} : \text{IsocFil}_{K/K_0}^{\text{ad}} &\longrightarrow \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{cris}}(\Gamma_K) \\ (N, \varphi, \text{Fil}^\bullet N_K) &\longmapsto \text{Fil}^0(N \otimes_{K_0} B_{\text{cris}})^{\varphi=\text{Id}}.\end{aligned}$$

La catégorie  $\text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{cris}}(\Gamma_K)$  est tannakienne neutre sur  $\mathbb{Q}_p$  avec comme foncteur fibre naturel:

$$\begin{aligned}\omega : \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{cris}}(\Gamma_K) &\longrightarrow \text{Vect}_{\mathbb{Q}_p} \\ (V, \rho) &\longmapsto V.\end{aligned}$$

Il y a de plus un isomorphisme de foncteurs

$$(8) \quad \omega \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\text{cris}} \xrightarrow{\sim} (\omega' \circ \mathbb{D}_{\text{cris}}) \otimes_{K_0} B_{\text{cris}}$$

c'est à dire, les foncteurs fibres  $\omega$  et

$$\omega' \circ \mathbb{D}_{\text{cris}} : \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{cris}}(\Gamma_K) \longrightarrow \text{Vect}_{K_0}$$

deviennent isomorphes après extension des scalaires à  $B_{\text{cris}}$ .

Soit  $\text{Isoc}_{K_0}$  la catégorie des isocristaux  $(N, \varphi)$  où  $N$  est un  $K_0$ -espace vectoriel de dimension finie et  $\varphi$  un isomorphisme  $\sigma$ -linéaire. Elle est Tannakienne sur  $\mathbb{Q}_p$  avec un foncteur fibre évident

$$\begin{aligned}\omega' : \text{Isoc}_{K_0} &\longrightarrow \text{Vect}_{K_0} \\ (N, \varphi) &\longmapsto N\end{aligned}$$

que l'on note de la même façon que le foncteur fibre  $\omega'$  sur  $\text{IsocFil}_{K/K_0}^{\text{ad}}$  puisque ce dernier est obtenu par composition

$$\text{IsocFil}_{K/K_0}^{\text{ad}} \longrightarrow \text{Isoc}_{K_0} \xrightarrow{\omega'} \text{Vect}_{K_0}.$$

Supposons maintenant et dans toute la suite que  $k$  est algébriquement clos. Pour un entier  $s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , soit  $\text{Isoc}_{K_0}^s$  la sous-catégorie Tannakienne des isocristaux dont les dénominateurs des pentes de Dieudonné-Manin divisent  $s$ . On a donc " $\text{Isoc}_{K_0} = \bigcup_{s \geq 1} \text{Isoc}_{K_0}^s$ " avec  $\text{Isoc}_{K_0}^s \subset \text{Isoc}_{K_0}^{s'}$

si  $s|s'$ . En particulier, toute sous-catégorie Tannakienne de  $\text{Isoc}_{K_0}$  engendrée par un nombre fini d'objets est contenue dans  $\text{Isoc}_{K_0}^s$  pour  $s \gg 1$ . Soit  $\mathbb{Q}_{p^s} = K_0^{\sigma^s = \text{Id}}$  l'extension non-ramifiée de degré  $s$  de  $\mathbb{Q}_p$  dans  $K_0$ . Il y a un foncteur fibre

$$\begin{aligned} \omega'_s : \text{Isoc}_{K_0}^s &\longrightarrow \text{Vect}_{\mathbb{Q}_{p^s}} \\ (N, \varphi) &\longmapsto \bigoplus_{\lambda \in \frac{1}{s}\mathbb{Z}} N^{\varphi^s = p^{s\lambda}} \end{aligned}$$

tel que  $\omega'_{|\text{Isoc}_{K_0}^s} = \omega'_s \otimes_{\mathbb{Q}_{p^s}} K_0$ . En particulier,  $\text{Isoc}_{K_0}$  possède un foncteur fibre sur  $\mathbb{Q}_p^{nr}$ . Soit  $\text{Isoc}_{K_0}^s \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s}$  la catégorie des isocristaux dans  $\text{Isoc}_{K_0}^s$  munis d'une action de  $\mathbb{Q}_{p^s}$ . Un objet de cette catégorie est noté par  $(N, \varphi, \iota)$  où  $\iota : \mathbb{Q}_{p^s} \rightarrow \text{End}(N, \varphi)$ . Elle est Tannakienne neutre sur  $\mathbb{Q}_{p^s}$  car  $\omega'_s$  induit un foncteur fibre

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}'_s : \text{Isoc}_{K_0}^s \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s} &\longrightarrow \text{Vect}_{\mathbb{Q}_{p^s}} \\ (N, \varphi, \iota) &\longmapsto N_{\gamma_0} \end{aligned}$$

où  $N = \bigoplus_{\gamma \in \text{Gal}(\mathbb{Q}_{p^s}|\mathbb{Q}_p)} N_\gamma$  avec  $N_\gamma = \{x \in N \mid \forall a \in \mathbb{Q}_{p^s}, \iota(a)(x) = \gamma(a)x\}$  et  $\gamma_0 = \text{Id}$ . Il y a un foncteur d'extension des scalaires (cf. [DMOS82])

$$\begin{aligned} \text{Isoc}_{K_0}^s &\longrightarrow \text{Isoc}_{K_0}^s \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s} \\ X &\longmapsto X \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s} \end{aligned}$$

et le diagramme suivant commute à un isomorphisme canonique près

$$(9) \quad \begin{array}{ccc} \text{Isoc}_{K_0}^s & & \\ \downarrow & \searrow^{\omega'_s} & \\ \text{Isoc}_{K_0}^s \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s} & \xrightarrow{\tilde{\omega}'_s} & \text{Vect}_{\mathbb{Q}_{p^s}}. \end{array}$$

où la flèche verticale est l'extension des scalaires précédente.

Revenons aux isocristaux filtrés admissibles. Soit  $\text{IsocFil}_{K/K_0}^{\text{ad},s}$  la sous-catégorie pleine de  $\text{IsocFil}_{K/K_0}^{\text{ad}}$  dont les objets sont les  $(N, \varphi, \text{Fil}^\bullet N_K)$  avec  $(N, \varphi) \in \text{Isoc}_{K_0}^s$ . On a donc par composition avec le foncteur oubli de la filtration

$$\text{IsocFil}_{K/K_0}^{\text{ad},s} \longrightarrow \text{Isoc}_{K_0}^s$$

des foncteurs fibres

$$\begin{aligned} \omega'_s : \text{IsocFil}_{K/K_0}^{\text{ad},s} &\longrightarrow \text{Vect}_{\mathbb{Q}_{p^s}} \\ \tilde{\omega}'_s : \text{IsocFil}_{K/K_0}^{\text{ad},s} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s} &\longrightarrow \text{Vect}_{\mathbb{Q}_{p^s}} \end{aligned}$$

avec un diagramme commutatif identique au diagramme (9) et

$$\omega'_{|\text{IsocFil}_{K/K_0}^{\text{ad},s}} = \omega'_s \otimes_{\mathbb{Q}_{p^s}} K_0.$$

**3.2. Le groupe de Mumford-Tate  $p$ -adique.** Soit  $K/K_0$  comme dans la section précédente où  $K_0 = W(k)_\mathbb{Q}$  et on suppose  $k$  algébriquement clos. On note également  $L = K_0$ . Soit  $G$  un groupe réductif sur  $\mathbb{Q}_p$ . Supposons nous donné une paire  $(b, \mu)$  où  $b \in G(L)$  et  $\mu : \mathbb{G}_m \rightarrow G_K$ .

On note  $\bar{b} \in B(G)$  la classe de  $\sigma$ -conjugaison de  $b$  et  $\bar{\mu}$  la classe de  $G(\bar{K})$ -conjugaison de  $\mu_{\bar{K}} : \mathbb{G}_m \rightarrow G_{\bar{K}}$ . Supposons que  $\bar{b} \in B(G, \bar{\mu})$  l'ensemble de Kottwitz (cf. [Kot97] section 6).

Supposons la paire  $(b, \mu)$  admissible au sens de la définition 1.18 de [RZ96]. Elle définit donc un tenseur foncteur exacte entre catégories Tannakiennes

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{b,\mu} : \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G) &\longrightarrow \text{IsocFil}_{K/K_0}^{\text{ad}} \\ (V, \rho) &\longmapsto (V_{K_0}, \rho(b) \cdot \text{Id} \otimes \sigma, \text{Fil}_{\mu}^{\bullet} V_K) \end{aligned}$$

où  $V_{K_0} := V \otimes_{\mathbb{Q}_p} K_0$ ,  $V_K := V \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$  et si  $V_K = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_{K,n}$  est la décomposition isotypique de la représentation  $\rho \circ \mu : \mathbb{G}_m \rightarrow \text{GL}(V_K)$  selon les caractères de  $\mathbb{G}_m$ ,  $X^*(\mathbb{G}_m) = \mathbb{Z}$ , alors  $\text{Fil}_{\mu}^k V_K = \bigoplus_{n \geq k} V_{K,n}$ .

Notons

$$\mathcal{F}_{b,\mu} = V_{\text{cris}} \circ \mathcal{G}_{b,\mu} : \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G) \longrightarrow \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{cris}}(\Gamma_K).$$

Soit le foncteur fibre canonique

$$\begin{aligned} \omega_{\text{can}} : \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G) &\longrightarrow \text{Vect}_{\mathbb{Q}_p} \\ (V, \rho) &\longmapsto V \end{aligned}$$

Puisque  $\bar{b} \in B(G, \bar{\mu})$ , le torseur des périodes associé est trivial: le foncteur fibre

$$\text{Rep}_{\mathbb{Q}_p} G \xrightarrow{\mathcal{F}_{b,\mu}} \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{cris}}(\Gamma_K) \xrightarrow{\omega} \text{Vect}_{\mathbb{Q}_p}$$

est isomorphe à  $\omega_{\text{can}}$ . Le choix d'un isomorphisme  $\omega_{\text{can}} \xrightarrow{\sim} \omega \circ \mathcal{F}_{b,\mu}$  définit un morphisme continu de groupes

$$\xi_{b,\mu} : \Gamma_K \longrightarrow G(\mathbb{Q}_p)$$

et un isomorphisme entre  $\mathcal{F}_{b,\mu}$  et le foncteur

$$\begin{aligned} \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p} G &\longrightarrow \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{cris}}(\Gamma_K) \\ (V, \rho) &\longmapsto (V, \rho \circ \xi_{b,\mu}). \end{aligned}$$

Un autre choix fournit un morphisme  $G(\mathbb{Q}_p)$ -conjugué. On obtient ainsi une classe de  $G(\mathbb{Q}_p)$ -conjugaison de morphismes  $\{\xi_{b,\mu}\}$ . On fixe désormais un isomorphisme de foncteurs fibres et donc une représentation  $\xi_{b,\mu}$  dans la classe de  $G(\mathbb{Q}_p)$ -conjugaison précédente.

Voici maintenant une traduction des résultats de Serre ([Ser79] théorème 1') et Sen ([Sen73] § 4, théorème 1). On note

- Proposition 3.2.1.** (1) *L'algèbre de Lie du groupe de Lie  $p$ -adique  $\text{Im}(\xi_{b,\mu}) \subset G(\mathbb{Q}_p)$  est une sous-algèbre de Lie algébrique de Lie  $G$ .*  
(2) *L'image de  $\xi_{b,\mu}$  est ouverte dans son enveloppe algébrique (i.e. son adhérence de Zariski).*  
(3) *La décomposition de Hodge-Tate d'une représentation cristalline définit canoniquement un cocaractère*

$$\mu_{HT} : \mathbb{G}_m \longrightarrow G_{\widehat{K}}$$

*$G(\widehat{K})$ -conjugué à  $\mu_{\widehat{K}}$  tel que la composante neutre de l'enveloppe algébrique de  $\text{Im} \xi_{b,\mu}$  soit le plus petit sous-groupe algébrique de  $G$  sur  $\mathbb{Q}_p$  contenant  $\text{Im} \mu_{HT}$ .*

*Proof.* La décomposition de Hodge-Tate d'une représentation cristalline fournit un tenseur foncteur exact

$$\text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{cris}}(\Gamma_K) \longrightarrow \widehat{K} - \text{espaces vectoriels } \mathbb{Z}\text{-gradués.}$$

On en déduit l'existence de  $\mu_{HT}$  tel que pour tout  $(V, \rho) \in \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p} G$ , la décomposition de Hodge-Tate de  $\rho \circ \xi_{b,\mu}$  soit donnée par  $\rho \circ \mu_{HT}$  i.e. si  $V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \widehat{K} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \widehat{K})_i$  est la décomposition isotypique de la représentation  $\rho \circ \mu_{HT}$  selon les caractères de  $\mathbb{G}_m$ , la représentation semi-linéaire  $(\rho \circ \xi_{b,\mu}) \otimes \text{Id}$  est isomorphe en restriction à  $(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \widehat{K})_i$  à une somme directe de  $\widehat{K}(i)$ .

Soit maintenant  $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$  une représentation fidèle de  $G$ . Appliquant ([Ser79] théorème 1') et ([Sen73] § 6) à la représentation  $\rho \circ \xi_{b,\mu}$  on conclut.  $\square$

**Définition 3.2.2.** On note  $\mathrm{MT}_{b,\mu}$  le sous-groupe algébrique de  $G$  qui est l'adhérence de Zariski de  $\mathrm{Im} \xi_{b,\mu}$ .

Bien sûr, le sous-groupe  $\mathrm{MT}_{b,\mu} \subset G$  n'est défini qu'à  $G(\mathbb{Q}_p)$ -conjugaison près via le choix d'un isomorphisme de foncteurs fibres  $\omega_{can} \xrightarrow{\sim} \omega \circ \mathcal{F}_{b,\mu}$  que l'on a fixé précédemment. La proposition précédente affirme que  $\mathrm{Im} \xi_{b,\mu}$  est un sous-groupe ouvert de  $\mathrm{MT}_{b,\mu}(\mathbb{Q}_p)$  que  $\mathrm{MT}_{b,\mu}$  est le plus petit sous-groupe algébrique de  $G$  contenant l'image de  $\mu_{HT}$ . Voici une description Tannakienne de  $\mathrm{MT}_{b,\mu}$ . Soit  $\mathcal{T}_{b,\mu} \subset \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{cris}}(\Gamma_K)$  la sous-catégorie Tannakienne de  $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{cris}}(\Gamma_K)$  engendrée par l'image essentielle de  $\mathcal{F}_{b,\mu}$ , c'est à dire la plus petite sous-catégorie de  $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{cris}}(\Gamma_K)$  contenant les  $\mathcal{F}_{b,\mu}(X)$ ,  $X \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p} G$ , stable par produit tensoriel, somme directe, contragrédiente et sous-quotient. Si  $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$  est une représentation fidèle de  $G$  alors  $\mathcal{T}_{b,\mu} = \langle \mathcal{F}_{b,\mu}(V, \rho) \rangle$  (catégorie Tannakienne engendrée). Il y a un foncteur fibre

$$\omega|_{\mathcal{T}_{b,\mu}} : \mathcal{T}_{b,\mu} \longrightarrow \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}_p}.$$

Le foncteur  $\mathcal{F}_{b,\mu}$  induit un plongement

$$\underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega|_{\mathcal{T}_{b,\mu}}) \hookrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega \circ \mathcal{F}_{b,\mu}) \simeq \underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega_{can}) = G.$$

**Proposition 3.2.3.** On a  $\mathrm{MT}_{b,\mu} = \underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega|_{\mathcal{T}_{b,\mu}})$ .

*Proof.* Il y a un morphisme canonique

$$\Gamma_K \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega|_{\mathcal{T}_{b,\mu}})(\mathbb{Q}_p) \subset G(\mathbb{Q}_p).$$

On a donc  $\mathrm{MT}_{b,\mu} \subset \underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega|_{\mathcal{T}_{b,\mu}})$ .

D'après Chevalley, il existe une représentation  $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$  et une droite  $D \subset V$  telles que  $\mathrm{MT}_{b,\mu}$  soit le stabilisateur de  $D$  dans  $G$ . C'est-à-dire  $\mathrm{MT}_{b,\mu} = \{g \in G \mid \rho(g)(D) \subset D\}$ .

Puisque

$$\rho \circ \xi_{b,\mu} : \Gamma_K \longrightarrow \mathrm{MT}_{b,\mu}(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}(V),$$

$D$  définit une sous-représentation de dimension 1 de  $\mathcal{F}_{b,\mu}(V, \rho)$  et donc un objet de la catégorie Tannakienne  $\mathcal{T}_{b,\mu}$  qui est un sous-objet de  $\mathcal{F}_{b,\mu}(V, \rho)$ . Il est nécessairement stable par l'action d'un élément de  $\underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega|_{\mathcal{T}_{b,\mu}})$ .  $\square$

Le foncteur fibre  $\omega|_{\mathcal{T}_{b,\mu}}$  fait de  $\mathcal{T}_{b,\mu}$  une catégorie Tannakienne neutre. On a donc le corollaire suivant.

**Corollaire 3.2.4.** On a une équivalence de catégories Tannakiennes

$$\mathcal{T}_{b,\mu} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{MT}_{b,\mu}.$$

**3.3. Description cristalline.** Notons maintenant  $\mathcal{T}_{b,\mu}^{\mathrm{cris}} \subset \mathrm{IsocFil}_{K/K_0}^{\mathrm{ad}}$  la sous-catégorie Tannakienne de  $\mathrm{IsocFil}_{K/K_0}^{\mathrm{ad}}$  engendrée par l'image essentielle de  $\mathcal{G}_{b,\mu}$ . Si  $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$  est fidèle, il s'agit de la sous-catégorie Tannakienne engendrée par l'isocrystal filtré  $(V_L, \rho(b)\sigma, \mathrm{Fil}_{\mu}^{\bullet} V_K)$ . Via la  $\otimes$ -équivalence

$$\mathbb{D}_{\mathrm{cris}} : \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{cris}}(\Gamma_K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{IsocFil}_{K/K_0}^{\mathrm{ad}}$$

on a donc une équivalence de catégories Tannakiennes

$$\mathcal{T}_{b,\mu} \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}_{b,\mu}^{\mathrm{cris}}.$$

Soit  $s \geq 1$  tel que pour une représentation fidèle  $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ , les pentes de l'isocrystal  $(V_L, \rho(b)\sigma)$  aient des dénominateurs divisant  $s$ . Alors,  $\mathcal{T}_{b,\mu}^{\mathrm{cris}} \subset \mathrm{IsocFil}_{K/K_0}^{\mathrm{ad},s}$ . Notons

$$\omega_{b,\mu}^{\mathrm{cris},s} := \omega'_{s|\mathcal{T}_{b,\mu}^{\mathrm{cris}}} : \mathcal{T}_{b,\mu}^{\mathrm{cris}} \longrightarrow \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}_p^s}.$$

**Définition 3.3.1.** On note  $MT_{b,\mu}^{\text{cris}} := \underline{\text{Aut}}^{\otimes}(\omega_{b,\mu}^{\text{cris},s})$ .

Soit  $\nu_b : \mathbb{D} \rightarrow G_L$  le morphisme des pentes (cf. [Kot85] section 4) avec  $\mathbb{D}$  le pro-tore des pentes,  $X^*(\mathbb{D}) = \mathbb{Q}$ . Rappelons ([Kot85] et [RZ96] définition 1.8) que  $b$  est décent pour l'entier  $s$  s'il vérifie  $(b\sigma)^s = (s.\nu_b)(p)\sigma^s$ .

Si c'est le cas, d'après le corollaire 1.9 de [RZ96], on a  $b \in G(\mathbb{Q}_{p^s})$  et  $\nu_b : \mathbb{D} \rightarrow G_{\mathbb{Q}_{p^s}}$ .

On vérifie alors aussitôt le lemme suivant.

**Lemme 3.3.2.** *Supposons  $b$  décent pour l'entier  $s$ . Alors*

$$\begin{aligned} \omega'_s \circ \mathcal{G}_{b,\mu} &= \omega_{\text{can}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s} : \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p} G \longrightarrow \text{Vect}_{\mathbb{Q}_{p^s}} \\ (V, \rho) &\longmapsto V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s}. \end{aligned}$$

On en déduit que si  $b$  est décent pour  $s$  alors le foncteur  $\mathcal{G}_{b,\mu}$  induit canoniquement un plongement  $MT_{b,\mu}^{\text{cris}} \subset G_{\mathbb{Q}_{p^s}}$ .

Notons la proposition suivante qui relie le “groupe de Mumford-Tate cristallin” au “groupe de Mumford-Tate étale”.

**Proposition 3.3.3.** *Il y a un isomorphisme de schémas en groupes sur  $\text{Spec}(B_{\text{cris}})$*

$$MT_{b,\mu}^{\text{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_{p^s}} B_{\text{cris}} \xrightarrow{\sim} MT_{b,\mu} \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\text{cris}}.$$

De plus,  $MT_{b,\mu}^{\text{cris}}$  et  $MT_{b,\mu} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s}$  sont formes intérieures l'un de l'autre.

*Proof.* C'est une conséquence de l'existence de l'isomorphisme de foncteurs fibres sur la catégorie Tannakienne  $\mathcal{T}_{b,\mu}$

$$\omega_{b,\mu}^{\text{cris},s} \circ \mathbb{D}_{\text{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_{p^s}} B_{\text{cris}} \xrightarrow{\sim} \omega_{|\mathcal{T}_{b,\mu}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\text{cris}}.$$

□

Notons

$$\tilde{\omega}_{b,\mu}^{\text{cris},s} : \mathcal{T}_{b,\mu}^{\text{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s} \longrightarrow \text{Vect}_{\mathbb{Q}_{p^s}}$$

le foncteur fibre obtenu par extension des scalaires à partir de  $\omega_{b,\mu}^{\text{cris},s}$  (cf. [DMOS82] exp.II section 3). On a alors

$$MT_{b,\mu}^{\text{cris}} = \underline{\text{Aut}}^{\otimes}(\tilde{\omega}_{b,\mu}^{\text{cris},s})$$

et d'après ([DMOS82] exp.II proposition 3.11) le foncteur  $\tilde{\omega}_{b,\mu}^{\text{cris},s}$  induit une équivalence de catégories:

$$\tilde{\omega}_{b,\mu}^{\text{cris},s} : \mathcal{T}_{b,\mu}^{\text{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s} \xrightarrow{\sim} \text{Rep}_{\mathbb{Q}_{p^s}}(MT_{b,\mu}^{\text{cris}}).$$

Avant d'énoncer la proposition qui suit, rappelons qu'un objet  $X \in \mathcal{T}_{b,\mu}^{\text{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s}$  est dit de rang 1 si  $\dim_{\mathbb{Q}_{p^s}} \tilde{\omega}_{b,\mu}^{\text{cris},s}(X) = 1$ . Si  $X = (N, \varphi, \text{Fil}^{\bullet} N_K, \iota)$  où  $(N, \varphi, \text{Fil}^{\bullet} N_K) \in \mathcal{T}_{b,\mu}^{\text{cris}}$  et  $\iota : \mathbb{Q}_{p^s} \rightarrow \text{End}(N, \varphi, \text{Fil}^{\bullet} N_K)$  cela signifie que  $\dim_{K_0} N = s$ .

**Proposition 3.3.4.** *Supposons  $b$  décent pour l'entier  $s$ .*

(1) *On a*

$$MT_{b,\mu}^{\text{cris}} = \left\{ g \in G_{\mathbb{Q}_{p^s}} \mid \forall (V, \rho) \in \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p} G, \forall X \subset \mathcal{G}_{b,\mu}(V, \rho) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s} \text{ de rang } 1 \right. \\ \left. \rho(g).\tilde{\omega}_{b,\mu}^{\text{cris},s}(X) \subset \tilde{\omega}_{b,\mu}^{\text{cris},s}(X) \right\}.$$

(2) *Soit  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  une représentation fidèle. Pour  $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$  notons  $T^{m_1, m_2}$  la représentation  $\rho^{\otimes m_1} \otimes \rho^{\vee \otimes m_2}$ . On a alors*

$$MT_{b,\mu}^{\text{cris}} = \left\{ g \in G_{\mathbb{Q}_{p^s}} \mid \forall m_1, m_2, \forall X \subset \mathcal{G}_{b,\mu}(T^{m_1, m_2}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s} \text{ de rang } 1 \right. \\ \left. \rho(g).\tilde{\omega}_{b,\mu}^{\text{cris},s}(X) \subset \tilde{\omega}_{b,\mu}^{\text{cris},s}(X) \right\}.$$

*Proof.* Le point (2) résulte du point (1) et de ce que toute représentation de  $G$  se réalise comme sous-représentation de  $T^{m_1, m_2}$  pour des entiers  $m_1, m_2$ . Passons au point (1). Soit  $H \subset G_{\mathbb{Q}_{p^s}}$  le groupe algébrique de droite dans l'égalité cherchée. Par définition de  $\underline{\text{Aut}}^{\otimes}(\omega_{b, \mu}^{\text{cris}, s})$  on a  $\text{MT}_{b, \mu}^{\text{cris}} \subset H$ . D'après Chevalley, il existe une représentation  $\rho' : G_{\mathbb{Q}_{p^s}} \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{Q}_{p^s}}(V)$  et une  $\mathbb{Q}_{p^s}$ -droite  $D \subset V$  telle que

$$\text{MT}_{b, \mu}^{\text{cris}} = \{g \in G_{\mathbb{Q}_{p^s}} \mid \rho'(g)(D) \subset D\}.$$

Via l'équivalence  $\text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G) \otimes \mathbb{Q}_{p^s} = \text{Rep}_{\mathbb{Q}_{p^s}}(G)$ , soit  $\rho : G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{Q}_p}(V)$  la représentation de  $G$  munie de son action  $\iota$  de  $\mathbb{Q}_{p^s}$  associée à  $\rho'$ . On a donc  $\mathcal{G}_{b, \mu}(V, \rho) \in \mathcal{T}_{b, \mu}^{\text{cris}}$  et grâce à  $\iota$ ,

$$(\mathcal{G}_{b, \mu}(V, \rho), \mathcal{G}_{b, \mu}(\iota)) \in \mathcal{T}_{b, \mu}^{\text{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s}.$$

Puisque

$$\mathcal{T}_{b, \mu}^{\text{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s} \xrightarrow{\sim} \text{Rep}_{\mathbb{Q}_{p^s}} \text{MT}_{b, \mu}^{\text{cris}},$$

la droite  $D$  définit un sous-objet  $X \subset (\mathcal{G}_{b, \mu}(V, \rho), \mathcal{G}_{b, \mu}(\iota))$  de rang 1. Si  $Y \in \mathcal{T}_{b, \mu}^{\text{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s}$  et  $Z \in \mathcal{T}_{b, \mu}^{\text{cris}}$  est l'objet  $Y$  après oubli de l'action de  $\mathbb{Q}_{p^s}$ , on a une décomposition dans la catégorie  $\mathcal{T}_{b, \mu}^{\text{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s}$

$$Z \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s} = \bigoplus_{\gamma \in \text{Gal}(\mathbb{Q}_{p^s} | \mathbb{Q}_p)} (Z \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s})_{\gamma}$$

qui provient de ce que  $Z \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s}$  est muni d'une action de  $\mathbb{Q}_{p^s} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s}$ . Soit  $\gamma_0 = \text{Id} \in \text{Gal}(\mathbb{Q}_{p^s} | \mathbb{Q}_p)$ . Alors,  $Y = (Z \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s})_{\gamma_0} \subset Z \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s}$ . On a donc une suite de sous-objets dans  $\mathcal{T}_{b, \mu}^{\text{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s}$

$$X \subset (\mathcal{G}_{b, \mu}(V, \rho), \mathcal{G}_{b, \mu}(\iota)) \subset \mathcal{G}_{b, \mu}(V, \rho) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s}$$

Soit maintenant  $g \in H$ . Par définition de  $H$ , on a  $g(\tilde{\omega}_{b, \mu}^{\text{cris}, s}(X)) \subset \tilde{\omega}_{b, \mu}^{\text{cris}, s}(X)$ , mais

$$\tilde{\omega}_{b, \mu}^{\text{cris}, s}(X) = D \subset V = \tilde{\omega}_{b, \mu}^{\text{cris}, s}(\mathcal{G}_{b, \mu}(V, \rho), \mathcal{G}_{b, \mu}(\iota)).$$

et donc  $g \in \text{MT}_{b, \mu}^{\text{cris}}$ . □

Grâce à la proposition précédente et au lemme qui suit on va donner une description ‘‘concrète’’ de  $\text{MT}_{b, \mu}^{\text{cris}}$ .

**Lemme 3.3.5.** *Les objets de rang 1 de  $\text{IsocFil}_{K/K_0}^{\text{ad}, s} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s}$  sont classifiés par  $\mathbb{Z}^s$ . À  $(d_0, \dots, d_{s-1}) \in \mathbb{Z}^s$  est associé  $(N, \varphi, \text{Fil}^{\bullet} N_K, \iota)$  où  $(N, \varphi, \text{Fil}^{\bullet} N_K) \in \text{IsocFil}_{K/K_0}^{\text{ad}, s}$  et  $\iota : \mathbb{Q}_{p^s} \rightarrow \text{End}(N, \varphi, \text{Fil}^{\bullet} N_K)$  sont donnés par:*

- on a  $N = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_{p^s} \cdot e_i$  où l'action  $\iota$  de  $\mathbb{Q}_{p^s}$  sur  $\mathbb{Q}_{p^s} \cdot e_i$  est donnée par le plongement  $\sigma^i$ ,
- l'action de  $\varphi$  est donnée par

$$\varphi(e_i) = \begin{cases} e_{i+1} & \text{si } 0 \leq i < s-1 \\ p^k e_0 & \text{si } i = s-1 \end{cases}$$

où  $k = \sum_{i=0}^{s-1} d_i$ ,

- la filtration est  $\text{Fil}^{\bullet} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}} \text{Fil}^{\bullet} K \cdot e_i$  où

$$\text{Fil}^j K \cdot e_i = \begin{cases} K \cdot e_i & \text{si } j \leq d_i \\ 0 & \text{si } j > d_i. \end{cases}$$

*Proof.* Soit le tore  $T = \text{Res}_{\mathbb{Q}_{p^s}/\mathbb{Q}_p} \mathbb{G}_m$ . Les objets de rang 1 dans  $\text{IsocFil}_{K/K_0}^{\text{ad}, s} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s}$  sont donnés par les paires admissibles  $(b', \mu')$  dans  $T$  qui se calculent à isomorphisme près grâce à la proposition 1.21 de [RZ96]. □

Voici maintenant la description de  $MT_{b,\mu}^{\text{cris}}$  que nous utiliserons dans la suite.

**Proposition 3.3.6.** *Supposons  $b$  décent pour l'entier  $s$ . Pour  $(V, \rho) \in \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p} G$  et  $v \in V_K$  notons*

$$\text{deg}_\mu(v) = \sup\{k \in \mathbb{Z} \mid v \in \text{Fil}_\mu^k V_K\}.$$

(1) On a

$$MT_{b,\mu}^{\text{cris}} = \left\{ g \in G_{\mathbb{Q}_{p^s}} \mid \begin{array}{l} \forall (V, \rho) \in \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p} G, \forall k \in \mathbb{Z}, \forall v \in V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s} \text{ non nul satisfaisant} \\ (s.\rho \circ \nu_b)(p).v = p^k v \text{ et } \sum_{i=0}^{s-1} \text{deg}_\mu((\rho(b)\sigma)^i(v)) = k, \exists c \in \mathbb{G}_m \rho(g).v = cv \end{array} \right\}.$$

(2) Si  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  est une représentation fidèle,  $T^{m_1, m_2} = V^{\otimes m_1} \otimes V^{\vee \otimes m_2}$  et on note encore  $\rho$  l'action de  $G$  sur  $T^{m_1, m_2}$ ,

$$MT_{b,\mu}^{\text{cris}} = \left\{ g \in G_{\mathbb{Q}_{p^s}} \mid \begin{array}{l} \forall m_1, m_2 \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{Z}, \forall v \in T^{m_1, m_2} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s} \text{ non nul satisfaisant} \\ (s.\rho \circ \nu_b)(p).v = p^k v \text{ et } \sum_{i=0}^{s-1} \text{deg}_\mu((\rho(b)\sigma)^i(v)) = k, \exists c \in \mathbb{G}_m \rho(g).v = cv \end{array} \right\}.$$

*Proof.* Avec les notations du lemme 3.3.5, si  $X \in \text{IsocFil}_{K/K_0}^{\text{ad}, s} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s}$  est l'objet de rang 1 associé à  $(d_0, \dots, d_{s-1}) \in \mathbb{Z}^s$ ,  $k = \sum_i d_i$ , et

$$Y = (N, \varphi, \text{Fil}^\bullet N_K, \iota) \in \text{IsocFil}_{K/K_0}^{\text{ad}, s} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s},$$

où  $\iota$  est l'action de  $\mathbb{Q}_{p^s}$ , on a

$$\begin{aligned} \text{Hom}(X, Y) \setminus \{0\} &\longrightarrow \left\{ v \in N \setminus \{0\} \mid \begin{array}{l} \forall a \in \mathbb{Q}_{p^s}, \iota(a).x = ax, \quad \varphi^s(v) = p^k v \\ \text{et si } 0 \leq i \leq s-1, \text{deg}_{\text{Fil}^\bullet N_K}(\varphi^i(v)) = d_i \end{array} \right\} \\ f &\longmapsto f(e_0). \end{aligned}$$

Cela résulte de ce que puisque  $X$  est de rang 1, un morphisme de  $X$  dans  $Y$  est un monomorphisme si et seulement s'il est non-nul. De plus, puisque nos isocristaux filtrés sont admissibles, un tel monomorphisme est strictement compatible aux filtrations. Le résultat est alors une conséquence de la proposition 3.3.4 couplé du fait que si  $Z = (N, \varphi, \text{Fil}^\bullet N_K) \in \text{IsocFil}_{K/K_0}^{\text{ad}, s}$ , alors

$$Z \otimes \mathbb{Q}_{p^s} = (N \otimes \mathbb{Q}_{p^s}, \varphi, \text{Fil}^\bullet(N_K \otimes \mathbb{Q}_{p^s}), \iota) \in \text{IsocFil}_{K/K_0}^{\text{ad}, s}$$

où

- $N \otimes \mathbb{Q}_{p^s} = \bigoplus_{\tau \in \text{Gal}(\mathbb{Q}_{p^s}|\mathbb{Q}_p)} N_\tau$  avec  $N_\tau = N$  et l'action  $\iota$  de  $\mathbb{Q}_{p^s}$  sur  $N_\tau$  est donnée par  $\tau$ ;
- $\varphi((a_\tau)_\tau) = (\varphi(a_{\sigma^{-1}\tau}))_\tau$  pour  $(a_\tau)_\tau \in N \otimes \mathbb{Q}_{p^s} = \bigoplus_\tau N_\tau$ ;
- filtration  $\text{Fil}^\bullet(N_K \otimes \mathbb{Q}_{p^s})$  est induite par les filtrations  $\text{Fil}^\bullet(N_{\tau, K}) = \text{Fil}^\bullet(N_K)$  sur chaque composante.

□

#### 4. FILTRATIONS GÉNÉRIQUES DE LA CATÉGORIE DES REPRÉSENTATIONS D'UN GROUPE RÉDUCTIF

**4.1. Filtrations de la catégorie des représentations d'un groupe réductif.** Soit  $K$  un corps et  $G$  un groupe réductif sur  $K$ . Si  $\mu : \mathbb{G}_m \rightarrow G$  un cocaractère, on note  $P_\mu \subset G$  le sous-groupe parabolique défini par

$$P_\mu = \left\{ g \in G \mid \lim_{z \rightarrow 0} \mu(z)g\mu(z)^{-1} \text{ existe} \right\}.$$

Le centralisateur de  $\mu$  dans  $G$  est un sous-groupe de Levi de  $P_\mu$ . Si  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  est une représentation de  $G$  dans un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit  $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n$  où  $\rho \circ \mu$  agit sur  $V_n$  par le caractère  $z \mapsto z^n$ . On pose alors  $\text{Fil}_\mu^\bullet V = \bigoplus_{n \geq \bullet} V_n$  qui est une filtration décroissante de  $V$  par des sous-représentations de  $P_\mu$ . Les gradués de cette filtration sont des représentations triviales du radical unipotent de  $P_\mu$  et sont donc des représentations

du groupe de Levi  $M_\mu = C_G(\mu)$ . Par exemple, pour la représentation adjointe de  $G$  sur  $\text{Lie } G$  on a  $\text{Lie } P_\mu = \text{Fil}_\mu^0 \text{Lie } G$ .

La correspondance  $(V, \rho) \mapsto \text{Fil}_\mu^\bullet V$  définit une filtration scindée de la catégorie Tannakienne  $\text{Rep}_K G$  (cf. par exemple [DRO10] chapitre 5). Soit  $R$  une  $K$ -algèbre et  $\text{Rep}_R G$  la catégorie des représentations de  $G$  dans des  $R$ -modules libres. Pour  $g \in G(R)$ ,  $g\mu g^{-1}$  définit une filtration de la catégorie  $\text{Rep}_R G$ . Si  $g \in P_\mu(R)$ , cette filtration est identique à celle définie par  $\mu$  (mais le scindage est différent si  $g$  ne centralise par  $\mu$ ).

Notons  $X_\mu = G/P_\mu$  la variété de drapeaux associée à  $P_\mu$ . Elle paramètre des filtrations de la catégorie des représentations de  $G$ . Ainsi, si  $K'|K$ , à chaque élément de  $X_\mu(K')$  est associé une filtration de  $\text{Rep}_{K'} G$ .

**Définition 4.1.1.** Soit  $x \in X_\mu(K')$ ,  $x = gP_\mu$  avec  $g \in G(K')$  (où l'existence de  $g$  est d'après [BT65] Théorème 4.13(a)). Pour  $(V, \rho) \in \text{Rep}_{K'} G$ , on note

$$\text{Fil}_x^\bullet V := \text{Fil}_{g\mu g^{-1}}^\bullet V = \rho(g) \text{Fil}_\mu^\bullet V$$

la filtration associée.

#### 4.2. La filtration générique associée à $\mu$ .

**Définition 4.2.1.** Soit  $(V, \rho) \in \text{Rep}_K G$ . On note

$$\overline{\text{Fil}}_\mu^\bullet V = \bigcap_{x \in X_\mu(K)} \text{Fil}_x^\bullet V$$

que l'on appelle la filtration générique associée à  $\mu$ .

Cette filtration ne dépend que de la classe de  $G(K)$ -conjugaison de  $\mu$ . Ainsi, si  $A$  est un tore déployé maximal dans  $G$ ,  $P_0$  un sous-groupe parabolique minimal contenant  $A$  et  $X_*(A)^+$  la chambre de Weyl positive associée, à chaque élément de  $X_*(A)^+$  est associée une filtration générique de  $V$ .

Cette filtration est invariante sous l'action de  $G$  et définit donc une filtration de la représentation  $\rho$  par des sous-représentations. On a

$$\overline{\text{Fil}}_\mu^\bullet V = \bigcap_{g \in G(K)} \rho(g) \text{Fil}_\mu^\bullet V$$

et  $\overline{\text{Fil}}_\mu^k V$  est la plus grande sous-représentation de  $\rho$  contenue dans  $\text{Fil}_\mu^k V$ . Soit  $\text{deg}_\mu$  la fonction degré associée à la filtration  $\text{Fil}_\mu^\bullet V$ ,

$$\begin{aligned} \text{deg}_\mu : V &\rightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\} \\ v &\mapsto \sup\{k \in \mathbb{Z} \mid v \in \text{Fil}_\mu^k V\}. \end{aligned}$$

Alors la fonction degré  $\overline{\text{deg}}_\mu$  associée à la filtration générique est

$$\overline{\text{deg}}_\mu(v) = \inf_{g \in G(K)} \text{deg}_\mu(\rho(g).v).$$

On prendra garde au fait que le foncteur  $(V, \rho) \mapsto \overline{\text{Fil}}_\mu V$  ne définit pas en général une filtration de la catégorie Tannakienne  $\text{Rep}_K G$  (cette filtration n'est pas en général compatible au produit tensoriel).

**Lemme 4.2.2.** Soit  $\eta$  le point générique de  $X_\mu$ , soit  $k(\eta)$  son corps résiduel, soit  $K'$  une extension de  $k(\eta)$  et soit  $x \in X_\mu(K')$  le point correspondant. Pour  $(V, \rho) \in \text{Rep}_K G$  on a  $\overline{\text{Fil}}_\mu^\bullet V = V \cap \text{Fil}_x^\bullet V_{K'}$ .

*Proof.* Soit  $\mathcal{E}_\rho$  le  $\mathcal{O}_{X_\mu}$ -module localement libre de réalisation géométrique le fibré vectoriel  $G \times V$ . La filtration  $\text{Fil}_\mu^\bullet V$  de  $V$  forme une filtration de  $V$  par des sous-représentations de  $P_{\mu,\rho}$ . On a donc une filtration  $\text{Fil}^\bullet \mathcal{E}_\rho$  de  $\mathcal{E}_\rho$  par des sous- $\mathcal{O}_{X_\mu}$ -modules localement libres localement facteur direct de réalisation géométrique le fibré vectoriel filtré  $G \times \text{Fil}_\mu^\bullet V$ .

Soient maintenant  $v \in V$  et  $k \in \mathbb{Z}$ . Voyons  $v$  comme une section globale de  $\mathcal{E}_\rho$ . Considérons le foncteur

$$\begin{aligned} H_{v,k} : K - \text{Schémas} &\longrightarrow \text{Ensembles} \\ Y &\longmapsto \{f : Y \rightarrow X_\mu \mid f^*v \in \Gamma(Y, f^* \text{Fil}^k \mathcal{E}_\rho)\}. \end{aligned}$$

Puisque la filtration  $\text{Fil}^\bullet \mathcal{E}_\rho$  est formée de sous- $\mathcal{O}_{X_\mu}$ -modules localement libres localement facteurs directs,  $H_{v,k}$  est un sous-schéma fermé de  $X_\mu$ .

Soit maintenant  $v \in V \cap \text{Fil}_x^k V_{K'}$ . Le sous-schéma fermé  $H_{v,k}$  de  $X_\mu$  contient donc le point générique de  $X_\mu$ . On a donc  $H_{v,k} = X_\mu$  ce qui implique que  $X_\mu(K) = H_{v,k}(K)$  et donc  $v \in \overline{\text{Fil}}_\mu^k V$ .

Réciproquement, si  $v \in \overline{\text{Fil}}_\mu^k V$ , on a  $H_{v,k}(K) = X_\mu(K)$ . Puisque  $X_\mu(K)$  est Zariski dense dans  $X_\mu$  on a alors  $H_{v,k} = X_\mu$ . En particulier,  $x \in H_{v,k}(K')$  ou encore  $v \in \text{Fil}_x^\bullet V_{K'}$ .  $\square$

**4.3. Caractérisation en termes de plus haut poids.** Supposons maintenant  $K$  de caractéristique 0 et  $G$  déployé sur  $K$ . Soit  $T \subset B$  un tore maximal de  $G$  dans un sous-groupe de Borel. Si  $\Phi \subset X^*(T)$  désigne les racines de  $T$  dans  $\text{Lie } G$ , on note  $\Phi^+$  les racines positives c'est à dire celles dans  $\text{Lie } B$ . On note  $\check{\Phi} \subset X_*(T)$  les coracines. Soit

$$X^*(T)^+ = \{\chi \in X^*(T) \mid \forall \alpha \in \Phi^+, \langle \chi, \check{\alpha} \rangle \geq 0\}$$

les poids dominants. On suppose, ce que l'on peut toujours faire, que  $\mu$  est dans la chambre de Weyl positive,  $\mu \in X_*(T)^+$ , c'est-à-dire pour tout  $\alpha \in \Phi^+$ ,  $\langle \alpha, \mu \rangle \geq 0$ . On note  $w_0$  l'élément de plus grande longueur dans le groupe de Weyl. Ainsi,  $w_0 \cdot \mu$  est le représentant dans la chambre de Weyl négative de la classe de conjugaison de  $\mu$ . Rappelons également que  $w_0^2 = 1$  et donc si  $\chi \in X^*(T)$ ,  $\langle w_0 \cdot \chi, \mu \rangle = \langle \chi, w_0 \cdot \mu \rangle$ .

Rappelons le théorème suivant.

**Théorème 4.3.1** (Tits, [Tit71], Théorème 2.5). *Les  $K$ -représentations irréductibles de  $G$  sont classifiés, à  $K$ -isomorphisme près, par les poids dominants. De plus, elles sont toutes absolument irréductibles.*

Soit  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  une représentation de  $G$  sur  $K$ . Notons  $V = \bigoplus_{\lambda \in X^*(T)^+} V^\lambda$  la décomposition isotypique de  $V$  selon les représentations de plus haut poids  $\lambda$  de  $G$ , c'est à dire  $V^\lambda$  est une somme directe de représentations irréductibles de plus haut poids  $\lambda$ .

**Proposition 4.3.2.** *La filtration générique de  $V$  associée à  $\mu$  est donnée par*

$$\overline{\text{Fil}}_\mu^k V = \bigoplus_{\substack{\lambda \in X^*(T)^+ \\ \langle \lambda, w_0 \cdot \mu \rangle \geq k}} V^\lambda.$$

*Proof.* Soit  $V = \bigoplus_{\chi \in X^*(T)} V_\chi$  la décomposition de  $\rho|_T$ . On a alors  $\text{Fil}_\mu^k V = \bigoplus_{\langle \chi, \mu \rangle \geq k} V_\chi$ . Soit

$$\overline{\text{Fil}}_\mu^k V = \bigoplus_{\lambda \in X^*(T)^+} (\overline{\text{Fil}}_\mu^k V)^\lambda$$

la décomposition isotypique suivant les plus hauts poids de la représentation  $\overline{\text{Fil}}_\mu^k V$  de  $G$ . Si  $(\overline{\text{Fil}}_\mu^k V)^\lambda \neq 0$ , l'espace de plus bas poids  $(\overline{\text{Fil}}_\mu^k V)^\lambda \cap V_{w_0 \cdot \lambda}$  est non-nul contenu dans  $\text{Fil}_\mu^k V$  et

donc  $\langle \lambda, w_0 \cdot \mu \rangle = \langle w_0 \cdot \lambda, \mu \rangle \geq k$ . On en déduit que

$$\overline{\text{Fil}}_\mu^k V \subset \bigoplus_{\substack{\lambda \in X^*(T)^+ \\ \langle \lambda, w_0 \cdot \mu \rangle \geq k}} V^\lambda.$$

On a pour tout  $\lambda \in X^*(T)^+$

$$V^\lambda = \bigoplus_{\substack{\chi \in X^*(T) \\ w_0 \cdot \lambda \leq \chi \leq \lambda}} V^\lambda \cap V_\chi$$

où rappelons que  $\chi_1 \leq \chi_2$  signifie que  $\chi_2 - \chi_1$  est une combinaison linéaire à coefficients positifs de racines positives. Puisque  $\mu \in X_*(T)^+$ , si  $\chi \geq w_0 \cdot \lambda$  et  $\langle w_0 \cdot \lambda, \mu \rangle \geq k$  alors  $\langle \chi, \mu \rangle \geq k$  et donc  $V_\chi \subset \text{Fil}_\mu^k V$ . Si  $\langle \lambda, w_0 \cdot \mu \rangle \geq k$ , alors  $V^\lambda \subset \text{Fil}_\mu^k V$ . Mais puisque  $V^\lambda$  est stable sous l'action de  $G$  cela implique que

$$V^\lambda \subset \bigcap_{g \in G(K)} g \cdot \text{Fil}_\mu^k V = \overline{\text{Fil}}_\mu^k V.$$

On en déduit le résultat.  $\square$

*Remarque 4.3.3.* Il résulte de la proposition précédente que la filtration générique de  $(V, \rho)$  associée à  $\mu$  est canoniquement scindée, ce qui n'était pas à priori évident.

## 5. LE GROUPE DE MUMFORD-TATE $p$ -ADIQUE GÉNÉRIQUE

Soit  $G$  un groupe réductif non-ramifié sur  $\mathbb{Q}_p$ . Soit  $b \in G(L)$  et  $\mu : \mathbb{G}_m \rightarrow G_K$ . Supposons que la classe de  $\sigma$ -conjugaison  $\bar{b}$  de  $b$  est dans l'ensemble de Kottwitz  $B(G, \mu)$ . Soit  $E \subset L$  le corps de définition de la classe de conjugaison de  $\mu$ .

Soit  $A \subset T \subset B$  un triplet où  $B$  est un sous-groupe de Borel de  $G$ ,  $T$  un tore maximal et  $A$  un tore déployé maximal. Supposons que  $\mu \in X_*(T)^+$ . Soient  $\nu_b \in X_*(A)_\mathbb{Q}^+$  le point de Newton associé à  $\bar{b}$  dans la chambre de Weyl positive et  $\bar{\mu} \in X_*(A)_\mathbb{Q}^+$  le point de Hodge défini par le barycentre de l'orbite de Galois de  $\mu$ , c'est-à-dire

$$\bar{\mu} := \frac{1}{[E : \mathbb{Q}_p]} \sum_{\tau \in \text{Gal}(E|\mathbb{Q}_p)} \mu^\tau.$$

**Définition 5.0.4.** On dit que le couple  $(b, \mu)$  est *HN-irréductible* si pour tout sous-groupe de Levi standard propre  $M$  de  $G$ , on n'a pas  $\nu_b \preceq \bar{\mu}$  dans la chambre de Weyl positive de  $M$  dans  $X_*(A)_\mathbb{Q}$ .

Dans le cas des données de Rapoport-Zink de type EL et PEL précédentes, la condition de HN-irréductibilité est équivalente à dire que les polygones associés de Newton et de Hodge ne se touchent pas en dehors de leurs extrémités. Plus précisément, cela se traduit de la façon suivante. Soient  $n = \dim_F V$  et  $d = [F : \mathbb{Q}_p]$ . À tout élément

$$(\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{Q}^n$$

vérifiant  $\nu_1 \leq \dots \leq \nu_n$  on associe le polygone convexe

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\nu_1, \dots, \nu_n) : [0, n] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ i &\longmapsto \nu_1 + \dots + \nu_i \quad \text{si } i \in [1, n] \cap \mathbb{N} \\ 0 &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

de pentes  $\nu_1, \dots, \nu_n$  et d'origine  $(0, 0)$ . Puisque l'isocrystal  $(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} L, b\sigma)$  est muni d'une action de  $F$ , les multiplicités de ses pentes sont des multiples de  $d$ . Soient

$$\underbrace{\lambda_1 = \dots = \lambda_1}_{d\text{-fois}} \leq \dots \leq \underbrace{\lambda_i = \dots = \lambda_i}_{d\text{-fois}} \leq \dots \leq \underbrace{\lambda_n = \dots = \lambda_n}_{d\text{-fois}}$$

les pentes du polygone de Newton  $(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} L, b\sigma)$ . On pose alors

$$\mathcal{P}_N = \mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Soit

$$\mathcal{P}_H = \mathcal{P}\left(\frac{1}{d} \sum_{\tau \in I_F} \underbrace{(0, \dots, 0)}_{p_\tau}, \underbrace{(1, \dots, 1)}_{q_\tau}\right).$$

Puisque  $\bar{b} \in B(G, \mu)$ ,  $\mathcal{P}_N$  et  $\mathcal{P}_H$  ont même points terminaux et  $\mathcal{P}_N(x) \geq \mathcal{P}_H(x)$  pour tout  $0 \leq x \leq n$ . On demande alors que

$$\forall x \in ]0, n[, \quad \mathcal{P}_N(x) > \mathcal{P}_H(x).$$

*Remarque 5.0.5.*

- (1) Pour les espaces de Rapoport-Zink sans structures additionnelles, la condition précédente sur les polygones signifie que nos groupes  $p$ -divisibles n'ont pas de pente 0 et 1. Dans ce cas là la condition sur les polygones est nécessaire afin qu'il existe un point dans l'espace des périodes tel que l'image de la représentation de monodromie associée contienne un sous-groupe ouvert de  $G^{der}(\mathbb{Q}_p)$ . En effet, s'il existe une pente 0 ou 1, une telle représentation se factorise automatiquement par un sous-groupe parabolique propre de  $G(\mathbb{Q}_p)$ .
- (2) Bien que nous ne l'avons pas vérifié, il est en fait probable que cela soit toujours le cas pour des  $G$ -structures additionnelles générales: si les polygones de Newton et Hodge au sens précédent se touchent en dehors de leurs extrémités alors les représentations de monodromies  $\xi_x$  se factorisent par un sous-groupe parabolique propre.

Rappelons que  $L = K_0 = W(k)_{\mathbb{Q}}$  avec  $k$  algébriquement clos et  $K|K_0$  de degré fini.

**Théorème 5.0.6.** *Soit  $(G, b, \mu)$  comme dans le début de cette section. Soit  $\mathcal{F}$  la variété de drapeaux sur  $E$  associée à  $\mu$ . Supposons que  $b$  est décent,  $(b, \mu)$  est HN-irréductible et le sous-groupe parabolique  $P_\mu \in \mathcal{F}(K)$  est un point générique de la variété algébrique  $\mathcal{F}$ . On a alors*

- (1) *La paire  $(b, \mu)$  est admissible.*
- (2) *Le groupe de Mumford-Tate  $MT_{b, \mu}$  contient  $G^{der}$  et  $MT_{b, \mu}/G^{der}$  est le plus petit sous-tore du cocentre contenant l'image de  $\mu$ . En particulier, l'image de la représentation  $\xi_{b, \mu} : \text{Gal}(\bar{K}|K) \rightarrow G(\mathbb{Q}_p)$ , bien définie à  $G(\mathbb{Q}_p)$ -conjugaison près, contient un sous-groupe ouvert de  $G^{der}(\mathbb{Q}_p)$ .*

*Remarque 5.0.7.* Le résultat précédent est un analogue  $p$ -adique de résultats d'André ([And92] section 6) sur le groupe de Mumford-Tate générique en théorie de Hodge usuelle sur  $\mathbb{C}$ .

*Remarque 5.0.8.* Afin d'appliquer le théorème 5.0.6 au cas des espaces de Rapoport-Zink de type EL et PEL, à cause des normalisations concernant les filtrations de Hodge des modules de Dieudonné covariant, afin que le morphisme  $\xi_x : \text{Gal}(\bar{E}|K) \rightarrow G(\mathbb{Q}_p)$  soit bien celui associé au module de Tate il faut l'appliquer non pas à  $(b, \mu)$  mais  $(p^{-1}b, \tilde{\mu})$ . La condition concernant les polygones associés à  $(b, \mu)$  énoncée ci dessus est la même que celle associée à  $(p^{-1}b, \tilde{\mu})$ .

*Preuve du théorème 5.0.6.* Soit  $s$  un entier tel que  $b$  soit décent pour  $s$ . Choisissons  $s$  suffisamment grand de telle manière que  $G$  soit déployé sur  $\mathbb{Q}_{p^s}$ . On a donc  $E \subset \mathbb{Q}_{p^s}$ . De plus,  $b \in G(\mathbb{Q}_{p^s})$  et  $\nu_b : \mathbb{G}_m \rightarrow G_{\mathbb{Q}_{p^s}}$ . Soit  $A$  un tore déployé maximal dans  $G$  et  $B$  un sous-groupe de Borel contenant  $A$ . Notons  $T = C_G(A)$ , un tore non-ramifié qui est un sous-groupe de Levi de  $B$ . On a donc  $A \subset T \subset B$ . Puisque  $G$  est quasi-déployé et la classe de  $G(\mathbb{Q}_{p^s})$ -conjugaison de  $\nu_b$  définie sur  $\mathbb{Q}_p$ , il existe  $g \in G(\mathbb{Q}_{p^s})$  tel que  $g\nu_b g^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow A$ . Quitte à remplacer  $b$  par  $gbg^{-\sigma}$  et  $\mu$  par  $g\mu g^{-1}$  (ce qui ne change pas l'hypothèse de généricité concernant  $\mu$ ) on peut supposer que  $\nu_b \in X_*(A)_{\mathbb{Q}}^+$ , la chambre de Weyl positive.

Commençons par le point (1). Soit  $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}_{p^s}}$  la variété de drapeau sur  $\mathbb{Q}_{p^s}$  et  $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}_{p^s}}^{an}$  l'espace analytique de Berkovich associé. Soit  $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}_{p^s}}^{fa} \subset \mathcal{F}_{\mathbb{Q}_{p^s}}^{an}$  l'ouvert qui est le lieu de faible admissibilité de l'isocristal filtré associé à l'isocristal avec  $G$ -structure défini par  $b \in G(\mathbb{Q}_{p^s})$ . Si  $(V, \rho) \in \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p} G$  est une représentation et  $x \in \mathcal{F}_{\mathbb{Q}_{p^s}}^{an}$  on lui associe l'isocristal filtré  $(V_{\mathbb{Q}_{p^s}}, \rho(b)\sigma, \text{Fil}_x^\bullet V_{k(x)})$ . Alors,  $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}_{p^s}}^{fa}$  est le lieu de faible admissibilité de ces isocristaux filtrés (il suffit en fait de le tester pour une représentation fidèle de  $G$ ). Puisque  $b$  est décent, l'extension des scalaires de  $\mathbb{Q}_{p^s}$  à  $L$  induit une bijection

$$\{\text{sous isocristaux de } (V_{\mathbb{Q}_{p^s}}, \rho(b)\sigma)\} \xrightarrow{\sim} \{\text{sous isocristaux de } (V_L, \rho(b)\sigma)\}.$$

En particulier, si  $K'|L$  est une extension de degré fini et  $x \in \mathcal{F}(K')$ ,

$(V_{\mathbb{Q}_{p^s}}, \rho(b)\sigma, \text{Fil}_x^\bullet V_{K'})$  est faiblement admissible  $\iff (V_L, \rho(b)\sigma, \text{Fil}_x^\bullet V_{K'})$  est faiblement admissible.

Puisque  $\bar{b} \in B(G, \mu)$ , d'après le théorème 3 de [FR05],  $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}_{p^s}}^{fa}(L) \neq \emptyset$  et donc  $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}_{p^s}}^{fa} \neq \emptyset$ . Il existe donc un point fermé de la variété algébrique  $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}_{p^s}}$  qui soit un point de l'ouvert analytique  $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}_{p^s}}^{fa}$ . Notons  $z \in \mathcal{F}_{\mathbb{Q}_{p^s}}$  un tel point. Soit  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  une représentation fidèle de  $V$ . Soit  $N \subset V_{\mathbb{Q}_{p^s}}$  un sous-isocristal de  $(V_{\mathbb{Q}_{p^s}}, \rho(b)\sigma)$ . La fonction

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}_{\mathbb{Q}_{p^s}}| &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ x &\longmapsto t_H(N, \rho(b)\sigma, \text{Fil}_x^\bullet V_{k(x)} \cap N \otimes_{\mathbb{Q}_{p^s}} k(x)) \end{aligned}$$

(point terminal du polygone de Hodge) est semi-continue supérieurement et en particulier croît par spécialisation. Puisque  $\mu : \mathbb{G}_m \rightarrow G_K$  définit un point générique de  $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}_{p^s}}$  on a donc

$$\begin{aligned} t_H(N, \rho(b)\sigma, \text{Fil}_\mu^\bullet V_K \cap N \otimes_{\mathbb{Q}_{p^s}} K) &\leq t_H(N, \rho(b)\sigma, \text{Fil}_z^\bullet V_{k(z)} \cap N \otimes_{\mathbb{Q}_{p^s}} k(z)) \\ &\leq t_N(N, \rho(b)\sigma) \end{aligned}$$

où la seconde inégalité résulte de la faible admissibilité de  $z$ . Cela étant vrai pour tout  $N$ , on en déduit que l'isocristal filtré  $(V_{\mathbb{Q}_{p^s}}, \rho(b)\sigma, \text{Fil}_\mu^\bullet V_K)$  est faiblement admissible et donc  $(V_L, \rho(b)\sigma, \text{Fil}_\mu^\bullet V_K)$  l'est aussi. La paire  $(b, \mu)$  est donc admissible.

Passons au point (2). On utilise la description donnée dans la proposition 3.3.6 de la version cristalline du groupe de Mumford-Tate,  $\text{MT}_{b, \mu}^{\text{cris}}$ . Soit  $(V, \rho) \in \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p} G$ . Soit

$$V_{\mathbb{Q}_{p^s}} = \bigoplus_{\lambda \in X^*(T)^+} V_{\mathbb{Q}_{p^s}}^\lambda$$

la décomposition isotypique suivant les plus hauts poids de l'extension des scalaires de  $\mathbb{Q}_p$  à  $\mathbb{Q}_{p^s}$  de  $\rho$  (cf. section 4.3). On note  $\sigma$  pour  $\text{Id} \otimes \sigma$  agissant sur  $V_{\mathbb{Q}_{p^s}}$ . Notons  $\varphi = \rho(b)\sigma$  le Frobenius. On a alors  $\varphi : V_{\mathbb{Q}_{p^s}}^\lambda \xrightarrow{\sim} V_{\mathbb{Q}_{p^s}}^{\lambda^\sigma}$  où  $\lambda \mapsto \lambda^\sigma$  est donné par l'action de  $\text{Gal}(\mathbb{Q}_{p^s}|\mathbb{Q}_p)$  sur  $X^*(T)$ . Notons  $\mu' \in X_*(T)^+$  le représentant de la classe de conjugaison de  $\mu$  dans la chambre de Weyl positive. Soit

$$\text{deg}_\mu : V_{\mathbb{Q}_{p^s}} \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$$

la fonction degré associée à la filtration  $V_{\mathbb{Q}_{p^s}} \cap \text{Fil}_\mu^\bullet V_K$ . D'après le lemme 4.2.2 et la proposition 4.3.2, si  $v \in V_{\mathbb{Q}_{p^s}} \setminus \{0\}$  se décompose suivant les plus hauts poids en  $v = \sum_{\lambda \in \Lambda} v^\lambda$  où  $\Lambda \subset X^*(T)^+$  et pour tout  $\lambda \in \Lambda$ ,  $v^\lambda \neq 0$ , on a  $\text{deg}_\mu(v) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \langle \lambda, w_0 \cdot \mu' \rangle$ .

On a donc pour tout  $\lambda \in \Lambda$ ,

$$(10) \quad \sum_{i=0}^{s-1} \text{deg}_\mu(\varphi^i(v)) \leq \sum_{i=0}^{s-1} \langle \lambda^{\sigma^i}, w_0 \cdot \mu' \rangle = s \langle \lambda, w_0 \cdot \bar{\mu} \rangle$$

où  $\bar{\mu} = \frac{1}{s} \sum_{i=0}^{s-1} \mu'^{\sigma^i} \in X_*(A)_\mathbb{Q}$  est le point de Hodge associé à  $\mu$ . Regardons maintenant la décomposition de  $\rho$  sur  $\mathbb{Q}_{p^s}$  selon l'action de  $T_{\mathbb{Q}_{p^s}} : V_{\mathbb{Q}_{p^s}} = \bigoplus_{\chi \in X^*(T)} V_{\mathbb{Q}_{p^s}, \chi}$ .

Pour  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$V_{\mathbb{Q}_{p^s}}^{\varphi^s = p^k} = \bigoplus_{\substack{\chi \in X^*(T) \\ \langle \chi, \nu_b \rangle = \frac{k}{s}}} V_{\mathbb{Q}_{p^s}, \chi}.$$

Soit maintenant  $v = \sum_{\lambda \in \Lambda} v^\lambda$  comme précédemment vérifiant

$$(11) \quad \begin{cases} \varphi^s(v) = p^k v \\ \sum_{i=0}^{s-1} \deg_\mu(\varphi^i(v)) = k. \end{cases}$$

Pour  $\lambda \in \Lambda$  décomposons  $v^\lambda = \sum_{\chi \in X^*(T)} v_\chi^\lambda$  où  $v_\chi^\lambda \in V_{\mathbb{Q}_{p^s}, \chi}$ . Soit  $\chi$  tel que  $v_\chi^\lambda \neq 0$ . On a donc  $\langle \chi, \nu_b \rangle = \frac{k}{s}$  et puisque le poids  $\chi$  intervient dans la représentation de plus haut poids  $\lambda$ ,  $\chi \succeq w_0 \cdot \lambda$ . Combinant cela on obtient que  $\langle w_0 \cdot \lambda, \nu_b \rangle \leq \frac{k}{s}$ . Cette inégalité et l'inégalité (10) donnent

$$(12) \quad \langle w_0 \cdot \lambda, \nu_b \rangle \leq \langle w_0 \cdot \lambda, \bar{\mu} \rangle.$$

Puisque  $\bar{b} \in B(G, \mu)$ , on a  $\bar{\mu} \succeq \nu_b$  et donc, étant donné que  $w_0 \cdot \lambda$  est un poids antidominant,

$$(13) \quad \langle w_0 \cdot \lambda, \bar{\mu} - \nu_b \rangle \leq 0.$$

De (12) et (13) on déduit que  $\langle w_0 \cdot \lambda, \bar{\mu} - \nu_b \rangle = 0$ . HN-irréductibilité de  $(b, \mu)$  se traduit maintenant en ce que si  $\Delta_B \subset X^*(A)$  sont les racines simples de  $A$  dans Lie  $B$  et  $\bar{\mu} - \nu_b = \sum_{\alpha \in \Delta_B} a_\alpha \check{\alpha}$  avec, puisque  $\bar{\mu} \succeq \nu_b$ ,  $a_\alpha \geq 0$ , alors pour tout  $\alpha \in \Delta_B$ ,  $a_\alpha > 0$ . On a donc

$$\sum_{\alpha \in \Delta_B} a_\alpha \langle w_0 \cdot \lambda, \check{\alpha} \rangle = 0$$

mais puisque  $\langle w_0 \cdot \lambda, \check{\alpha} \rangle \leq 0$ , cela signifie que pour tout  $\alpha \in \Delta_B$ ,  $\langle w_0 \cdot \lambda, \check{\alpha} \rangle = 0$  soit encore  $\lambda \in \langle \Phi(A, G)^\vee \rangle^\perp$ , où  $\Phi(A, G) \subset X^*(A)$  sont les racines de  $A$  dans Lie  $G$ .

Soit maintenant  $\check{\alpha} \in \Phi(T, G)^\vee$  une coracine de  $T$  dans Lie  $G$ . On a alors

$$\left\langle \sum_{i=0}^{s-1} \lambda^{\sigma^i}, \check{\alpha} \right\rangle = \left\langle \lambda, \sum_{i=0}^{s-1} \check{\alpha}^{\sigma^{i-1}} \right\rangle = 0.$$

On a donc  $\sum_{i=0}^{s-1} \lambda^{\sigma^i} \in \langle \Phi(T, G)^\vee \rangle^\perp$ . Mais, pour tout  $i$ ,  $\lambda^{\sigma^i} \in X^*(T)^+$ . On en déduit que  $\lambda \in \langle \Phi(T, G)^\vee \rangle^\perp$ .

La représentation de plus haut poids associée à  $\lambda$  est donc une représentation de dimension 1 de  $G_{\mathbb{Q}_{p^s}}$ .

On a donc démontré que si  $v = \sum_{\lambda \in \Lambda} v^\lambda \in V_{\mathbb{Q}_{p^s}}$  avec pour tout  $\lambda \in \Lambda$ ,  $v_\lambda \neq 0$  et  $v$  satisfait les équations (11) alors pour tout  $\lambda \in \Lambda$ ,  $V_{\mathbb{Q}_{p^s}}^\lambda$  est une somme directe de représentations de dimension 1 de  $G_{\mathbb{Q}_{p^s}}$  i.e. de caractères  $G_{\mathbb{Q}_{p^s}} \rightarrow \mathbb{G}_m$ . On a donc  $\forall g \in G_{\mathbb{Q}_{p^s}}^{der}$ ,  $g.v = v$  soit encore  $G_{\mathbb{Q}_{p^s}}^{der} \subset \text{MT}_{b, \mu}^{\text{cris}}$  d'après la proposition 3.3.6. Mais puisque  $\text{MT}_{b, \mu} \otimes \mathbb{Q}_{p^s}$  est une forme intérieure de  $\text{MT}_{b, \mu}^{\text{cris}}$ , on a  $G^{der} \subset \text{MT}_{b, \mu}$ .

On calcule maintenant  $\text{MT}_{b, \mu}/G^{der}$ . Si  $\det : G \rightarrow G/G^{der} = D$ , cela revient à calculer  $\text{MT}_{\det(b), \det \circ \mu}$  c'est à dire les groupes de Mumford-Tate associés à un tore non-ramifié. Plus précisément, si  $T$  est un tore non-ramifié sur  $\mathbb{Q}_p$  et  $\mu_0 \in X_*(T)$ , soit  $b_0 \in B(T)$  l'unique élément tel que  $b_0 \in B(T, \mu_0)$ . On vérifie alors que  $\text{MT}_{b_0, \mu_0}$  est le plus petit sous-tore de  $T$  contenant l'image de  $\mu_0$ . Cela résulte par exemple du lemme 1.22 de [RZ96] qui montre que  $\text{MT}_{b_0, \mu_0}$  est le plus petit sous-tore de  $T$  contenant l'image du morphisme  $\chi_\mu$ .

La dernière assertion est due à la proposition 3.2.1.  $\square$

## 6. COMPOSANTES CONNEXES GÉOMÉTRIQUES DES TOURS DE RAPOPORT-ZINK

On reprend les notations de la section 1. Soit  $\check{\mathcal{M}} = \check{\mathcal{M}}(G, b, \mu)$  un espace de Rapoport-Zink non-ramifié simple de type EL ou PEL symplectique ou unitaire.

6.1. **Une conjecture.** Avant d'énoncer les résultats principaux de cet article, on a besoin d'une conjecture concernant les composantes connexes des espaces de Rapoport-Zink.

**Conjecture 6.1.1.** Supposons que  $(b, \mu)$  est HN-irréductible. Alors  $\varkappa : \check{\mathcal{M}} \rightarrow \Delta = \text{Hom}(X_{\mathbb{Q}_p}^*(G), \mathbb{Z})$  induit une bijection

$$\varkappa : \pi_0(\check{\mathcal{M}}) \xrightarrow{\sim} \text{Im } \varkappa.$$

On a le théorème suivant de Viehmann.

**Théorème 6.1.2** (Viehmann [Vie08b],[Vie08a]). *La conjecture précédente est vérifiée lorsque  $F = \mathbb{Q}_p$  dans le cas EL et PEL symplectique.*

La conjecture est également vérifiée pour des raisons évidentes dans le cas des espaces de Lubin-Tate. Il résulte également des travaux de Vollaard ([Vol10]) que cette conjecture est vérifiée dans le cas PEL unitaire basique lorsque  $F$  est une extension quadratique de  $\mathbb{Q}_p$  et la signature est  $(1, n-1)$ . Cette conjecture sera confirmé en toute généralité dan [CKV].

Soit  $\check{\mathcal{M}}_{red}$  la fibre spéciale réduite de  $\check{\mathcal{M}}$ , un  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -schéma localement de type fini. Puisque  $|\check{\mathcal{M}}| = |\check{\mathcal{M}}_{red}|$  la conjecture est un problème d'espaces de modules de groupes  $p$ -divisibles en caractéristique positive. Il s'agit de montrer que si  $x, x' \in \check{\mathcal{M}}_{red}(\overline{\mathbb{F}}_p)$  sont associés à  $(X, \rho)$  et  $(X', \rho')$  avec  $\text{ht } \rho = \text{ht } \rho'$  alors  $x$  et  $x'$  sont dans la même composante connexe.

Rappelons que  $\check{\mathcal{F}}^{an}$  est la variété de drapeaux associée sur  $\check{E}$  vue comme  $\check{E}$ -espace analytique de Berkovich et  $\check{\pi} : \check{\mathcal{M}}^{an} \rightarrow \check{\mathcal{F}}^{an}$  le morphisme de périodes avec l'image  $\check{\mathcal{F}}^a = \text{Im } \check{\pi}$ , cf. section 1.3.

**Lemme 6.1.3.** *Supposons que la conjecture 6.1.1 vérifiée, alors  $\check{\mathcal{F}}^a$  est connexe. De plus, pour toute composante connexe  $X$  de  $\check{\mathcal{M}}^{an}$ ,  $\check{\pi}(X) = \check{\mathcal{F}}^a$ .*

*Proof.* Pour  $i \in \text{Im } \varkappa \subset \mathbb{Z}$ , posons  $\check{\mathcal{M}}(i) = \varkappa^{-1}(i)$ . Il suffit de montrer que pour tout  $i_1, i_2 \in \text{Im } \varkappa$ ,  $\check{\pi}(\check{\mathcal{M}}(i_1)^{an}) = \check{\pi}(\check{\mathcal{M}}(i_2)^{an})$ . Soit  $K_g := gG(\mathbb{Z}_p)g^{-1} \cap G(\mathbb{Z}_p)$ , pour  $g \in G(\mathbb{Q}_p)$ . Considérons le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} & \check{\mathcal{M}}_{K_g} & \xrightarrow{g} & \check{\mathcal{M}}_{g^{-1}K_g g} & \\ \pi_{K_g, G(\mathbb{Z}_p)} \swarrow & & & & \searrow \pi_{g^{-1}K_g g, G(\mathbb{Z}_p)} \\ \check{\mathcal{M}}^{an} & & & & \check{\mathcal{M}}^{an} \\ & \searrow \check{\pi} & & \swarrow \check{\pi} & \\ & \check{\mathcal{F}}^a & & & \end{array}$$

Pour  $(X, \rho, \eta) \in \check{\mathcal{M}}_{K_g}$  dans le cas EL (resp.  $(X, \lambda, \rho, \eta) \in \check{\mathcal{M}}_{K_g}$  dans le cas PEL), soit  $\rho'$  le quasi-isogénie apparaissant dans  $g \cdot (X, \rho, \eta)$  (resp.  $g \cdot (X, \lambda, \rho, \eta)$ ). Alors

$$\text{ht } \rho' = \begin{cases} \text{ht } \rho - dv_p(\det(g)) & \text{cas EL} \\ \text{ht } \rho - \frac{nd}{2}v_p(c(g)) & \text{cas PEL} \end{cases}$$

où  $d = [F : \mathbb{Q}_p]$  et  $n = \dim_F V$  si  $(F, V, \bar{b}, \bar{\mu})$  (resp.  $(F, V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \bar{b}, \bar{\mu})$ ) est la donnée de Rapoport-Zink dans le cas EL (resp. PEL).

Donc pour  $i \in \text{Im } \varkappa$ ,

$$\pi_{g^{-1}K_g g, G(\mathbb{Z}_p)} \circ \pi_{K_g, G(\mathbb{Z}_p)}^{-1}(\check{\mathcal{M}}(i)^{an}) = \begin{cases} \check{\mathcal{M}}(i + v_p(\det(g)))^{an} & \text{cas EL} \\ \check{\mathcal{M}}(i + v_p(c(g)))^{an} & \text{cas PEL} \end{cases}$$

On en déduit que

$$\check{\pi}(\check{\mathcal{M}}(i)^{an}) = \begin{cases} \check{\pi}(\check{\mathcal{M}}(i + v_p(\det(g)))^{an}) & \text{cas EL} \\ \check{\pi}(\check{\mathcal{M}}(i + v_p(c(g)))^{an}) & \text{cas PEL.} \end{cases}$$

Le résultat s'en déduit du fait que l'image du morphisme composé naturel

$$\begin{array}{ccc} G(\mathbb{Q}_p) \rightarrow D(\mathbb{Q}_p) & \rightarrow & \Delta = \text{Hom}(X_{\mathbb{Q}_p}^*(D), \mathbb{Z}) \\ g & \mapsto & [\chi \mapsto v_p(\chi(g))] \end{array}$$

est l'image de  $\varkappa$ , puisque l'image de  $D(\mathbb{Q}_p) \rightarrow \Delta$  est l'image de  $\varkappa$ , et  $G(\mathbb{Q}_p) \rightarrow D(\mathbb{Q}_p)$  est surjectif d'après Kneser [Kne65].  $\square$

**6.2. L'image de la monodromie géométrique des espaces de Rapoport-Zink.** Rappelons que l'on note  $\pi_1$  pour le groupe fondamental classifiant les revêtements étales finis d'un espace analytique de Berkovich et  $\pi_1^{dJ}$  pour le groupe fondamental défini par de Jong. On note  $\mathbb{C}_p$  le complété de  $\overline{E}$ . Rappelons que l'on note  $I_E = \text{Gal}(\overline{E}|\check{E})$ . D'après les corollaires 1.3.1 et 1.3.2, étant donné un point  $\bar{x} \in \check{\mathcal{M}}^{an}(\overline{E})$ , on a un diagramme commutatif

$$(14) \quad \begin{array}{ccccccc} \pi_1(\check{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}_p}^{an}, \bar{x}) & \longrightarrow & \pi_1(\check{\mathcal{M}}^{an}, \bar{x}) & \longrightarrow & I_E & \longrightarrow & 1 \\ \rho_{\bar{x}}^{\text{géo}} \downarrow & & \downarrow \rho_{\bar{x}} & & \downarrow \chi_{\det \bar{\mu}} & & \\ 1 \longrightarrow & G^{\text{der}}(\mathbb{Z}_p) & \longrightarrow & G(\mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\det} & D(\mathbb{Z}_p) & \end{array}$$

donné par les représentations de monodromie sur le module de Tate de la déformation universelle spécialisée en  $\bar{x}$ .

Voici le théorème principal. Dans le cas des espaces de Lubin-Tate ce théorème a été démontré par de Jong ([dJ95b], cf. proposition 7.4). Nous suivons sa stratégie de preuve.

**Théorème 6.2.1.** *Supposons la conjecture 6.1.1 vérifiée. Supposons que  $(b, \mu)$  est HN-irréductible. Soit  $\bar{x} \in \check{\mathcal{M}}^{an}(\overline{E})$ . La représentation de monodromie géométrique*

$$\rho_{\bar{x}}^{\text{géo}} : \pi_1(\check{\mathcal{M}}^{an} \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \bar{x}) \longrightarrow G^{\text{der}}(\mathbb{Z}_p)$$

*sur le module de Tate de la déformation universelle spécialisée en  $\bar{x}$  est surjective.*

*Proof. Première étape: l'image est ouverte.*

Commençons par montrer que l'image de  $\rho_{\bar{x}}^{\text{géo}}$  est ouverte. On peut supposer que  $b \in G(L)$  est décent. Soit  $X$  la composante connexe de l'image de  $\bar{x}$  dans  $\check{\mathcal{M}}^{an}$ . D'après le lemme 6.2.2 qui suit elle est géométriquement connexe. Son image par l'application de périodes,  $\check{\pi}(X)$ , est un ouvert de  $\check{\mathcal{F}}^{an}$ . Puisque l'on suppose la conjecture 6.1.1 vérifiée, on a  $\check{\pi}(X) = \text{Im } \check{\pi}$  grâce au lemme 6.1.3. D'après la proposition 2.0.3 il existe un point à valeurs dans  $\check{E}$  de  $\check{\mathcal{F}}$  qui est un point générique de la variété de drapeaux sur  $E$ . D'après le point (1) du théorème 5.0.6 un tel point est dans  $\check{\pi}(X)$ .

Soit  $K|\check{E}$  de degré fini avec  $K \subset \overline{E}$  et  $y \in X(K)$  s'envoyant sur un tel point par l'application de périodes. Soit  $\bar{y}$  le point géométrique associé au plongement  $K \subset \overline{E}$ . L'image de  $\rho_{\bar{y}}^{\text{géo}}$



Or, l'application de Kodaira-Spencer pour  $Y'$  s'annule car  $\Omega_{\mathcal{O}_K/\mathcal{O}_{\check{E}}}^1 = 0$ , mais celle pour  $X^{\text{univ}}$  est l'isomorphisme

$$(\Omega_{\check{\mathcal{M}}/\text{Spf}(\mathcal{O}_{\check{E}})}^1)^\vee \xrightarrow{\sim} \text{Lie}(X^{\text{univ}D}) \otimes_{\mathcal{O}_{\check{\mathcal{M}}}} \text{Lie}(X^{\text{univ}})$$

On en déduit que le morphisme naturel

$$f^*(\Omega_{\check{\mathcal{M}}/\text{Spf}(\mathcal{O}_{\check{E}})}^1) \rightarrow \Omega_{\text{Spf}(A')/\text{Spf}(\mathcal{O}_{\check{E}})}^1$$

s'annule, où  $f : \text{Spf}(A') \rightarrow \check{\mathcal{M}}$ . Donc

$$\Omega_{\text{Spf}(A')/\text{Spf}(\mathcal{O}_{\check{E}})}^1 \xrightarrow{\sim} \Omega_{\text{Spf}(A')/\check{\mathcal{M}}}^1$$

Or,  $(\Omega_{\text{Spf}(A')/\check{\mathcal{M}}}^1)^{\text{an}}$  s'annule puisque  $\text{Sp}(A'[\frac{1}{p}]) \rightarrow \check{\mathcal{M}}^{\text{an}}$  est une immersion ouverte composé avec un morphisme fini étale. On en déduit que

$$(\Omega_{\text{Spf}(A')/\text{Spf}(\mathcal{O}_{\check{E}})}^1)^{\text{an}} = \Omega_{\text{Sp}(A'[1/p])/\text{Sp}(\check{E})}^1 = 0.$$

D'où  $\check{\mathcal{M}}$  est de dimension 0. Cela n'est pas possible puisque l'on suppose que les polygones de Newton et de Hodge n'ont pas de point commun en dehors de leurs extrémités.

*Deuxième étape: utilisation des représentations de monodromie de de Jong*

Soit maintenant  $\bar{y} = \check{\pi}(\bar{x})$ , un point géométrique de l'espace des périodes. Rappelons (cf. section 1.3) qu'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_1^{dJ}(\check{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}_p}^{\text{an}}, \bar{x}) & \xrightarrow{\alpha} & \pi_1(\check{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}_p}^{\text{an}}, \bar{x}) \xrightarrow{\rho_{\bar{x}}^{\text{géo}}} G^{\text{der}}(\mathbb{Z}_p) \\ \check{\pi}_* \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1^{dJ}(\check{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}_p}^a, \bar{y}) & \xrightarrow{\beta} & G^{\text{der}}(\mathbb{Q}_p). \end{array}$$

Notons  $\Gamma = \text{Im } \beta$ . Dans le diagramme précédent on a :

- les groupes  $\pi_1^{dJ}(\check{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}_p}^{\text{an}}, \bar{x})$  et  $\pi_1^{dJ}(\check{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}_p}^a, \bar{y})$  sont prodiscrets,
- le groupe  $\pi_1(\check{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}_p}^{\text{an}}, \bar{x})$  est profini,
- l'image de  $\alpha$  est dense,
- on a  $\Gamma \cap G^{\text{der}}(\mathbb{Z}_p) = \text{Im}(\rho_{\bar{x}}^{\text{géo}} \circ \alpha)$ .

Soit  $\bar{\Gamma}$  l'adhérence de  $\Gamma$  dans  $G^{\text{der}}(\mathbb{Q}_p)$  pour la topologie  $p$ -adique. On a un diagramme d'inclusions

$$\Gamma \supset \text{Im}(\rho_{\bar{x}}^{\text{géo}} \circ \alpha) \underset{\text{dense}}{\subset} \text{Im } \rho_{\bar{x}}^{\text{géo}}$$

duquel on déduit que  $\text{Im } \rho_{\bar{x}}^{\text{géo}} \subset \bar{\Gamma}$ . Puisqu'on a montré que  $\text{Im } \rho_{\bar{x}}^{\text{géo}}$  est ouvert dans  $G^{\text{der}}(\mathbb{Z}_p)$ , on en déduit que  $\bar{\Gamma}$  est un sous-groupe ouvert de  $G^{\text{der}}(\mathbb{Q}_p)$ .

Comme remarqué au début de cette démonstration, si  $X$  est une composante connexe de  $\check{\mathcal{M}}^{\text{an}}$  alors  $\text{Im } \check{\pi} = \check{\pi}(X)$  et donc  $\text{Im } \check{\pi}$  est connexe. Il résulte alors de la description de de Jong de l'espace  $\check{\mathcal{M}}^{\text{an}}$  en termes de réseaux dans le  $\mathbb{Q}_p$ -système local sur le lieu admissible  $\text{Im } \check{\pi}$  et du lemme qui suit que  $\pi_0(\check{\mathcal{M}}^{\text{an}}) \simeq \Gamma \backslash G(\mathbb{Q}_p) / G(\mathbb{Z}_p)$ . Puisque  $\pi_0(\check{\mathcal{M}}^{\text{an}})/p^{\mathbb{Z}}$  est fini on en déduit que

$$|\Gamma \backslash G(\mathbb{Q}_p) / G(\mathbb{Z}_p) \cdot p^{\mathbb{Z}}| < +\infty$$

et que donc  $|\bar{\Gamma} \backslash G^{\text{der}}(\mathbb{Q}_p)| < +\infty$  en utilisant le fait que  $\bar{\Gamma}$  est ouvert. Alors  $\bar{\Gamma}$  est de covolume fini dans  $G^{\text{der}}(\mathbb{Q}_p)$ . D'après ([Mar91] II théorème 5.1),  $\bar{\Gamma}$  étant ouvert, on en déduit que

$\bar{\Gamma} = G^{der}(\mathbb{Q}_p)$ . Mais puisque  $G^{der}(\mathbb{Z}_p)$  est ouvert dans  $G^{der}(\mathbb{Q}_p)$ , on a

$$\overline{\Gamma \cap G^{der}(\mathbb{Z}_p)} = \bar{\Gamma} \cap G^{der}(\mathbb{Z}_p) = G^{der}(\mathbb{Z}_p).$$

Puisque  $\Gamma \cap G^{der}(\mathbb{Z}_p) = \text{Im}(\rho_{\tilde{x}}^{\text{géo}} \circ \alpha)$  et  $\text{Im} \rho_{\tilde{x}}^{\text{géo}}$  est fermé dans  $G^{der}(\mathbb{Z}_p)$  on conclut que

$$\text{Im} \rho_{\tilde{x}}^{\text{géo}} = G^{der}(\mathbb{Z}_p).$$

□

**Lemme 6.2.2.**

(1) Soit  $\check{\mathcal{M}}_{red}$  la fibre spéciale réduite du schéma formel  $\check{\mathcal{M}}$ , un  $\bar{\mathbb{F}}_p$ -schéma localement de type fini. L'application de spécialisation induit une bijection

$$\pi_0(\check{\mathcal{M}}^{an}) \xrightarrow{\sim} \pi_0(\check{\mathcal{M}}_{red}).$$

(2) Toute composante connexe de  $\check{\mathcal{M}}^{an}$  est géométriquement connexe.

*Proof.* Le point (1) résulte de ce que  $\check{\mathcal{M}}^{an}$  est formellement lisse et du théorème 7.4.1 de [dJ95a]. Le point (2) résulte du point (1) et de ce que  $\check{\mathcal{M}}$  étant formellement lisse, toute composante connexe de  $\check{\mathcal{M}}^{an}$  possède un point  $\check{E}$ -rationnel. □

**Lemme 6.2.3.** L'algèbre de Lie de  $G^{der}$  est simple.

*Proof.* Dans tous les cas,

$$\text{Lie } G^{der} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \bar{\mathbb{Q}}_p = \prod_{\tau \in \tilde{I}_F} \mathfrak{g}.$$

où  $\mathfrak{g}$  est simple et  $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p|\mathbb{Q}_p)$  agit par permutation des composantes. Si  $\mathfrak{h} \subset \text{Lie } G^{der}$  est un idéal on a donc  $\mathfrak{h}_{\bar{\mathbb{Q}}_p} = \prod_{\tau \in J} \mathfrak{g}$  où  $J \subset \tilde{I}_F$ . Mais l'ensemble  $J$  est nécessairement invariant par l'action de  $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p|\mathbb{Q}_p)$ . On a donc soit  $J = \emptyset$ , soit  $J = \tilde{I}_F$ . □

**6.3. Composantes connexes géométriques des tours de Rapoport-Zink.** Du théorème 6.2.1 on déduit le suivant qui est le théorème principal de cet article.

**Théorème 6.3.1.** Supposons la conjecture 6.1.1 vérifiée. Supposons que  $(b, \mu)$  est HN-irréductible.

(1) Les fibres géométriques du morphisme déterminant

$$\check{\mathcal{M}}_K \longrightarrow \det(\check{\mathcal{M}})_{\det K} = \check{\mathcal{M}}(D, \det \tilde{\mu})_{\det K}$$

sont les composantes connexes géométriques de  $\check{\mathcal{M}}_K$ .

(2) Le morphisme déterminant induit des bijections compatibles lorsque  $K$  varie

$$\pi_0(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p) \xrightarrow{\sim} D(\mathbb{Q}_p)/\det K.$$

L'action de  $(g_1, g_2) \in J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p)$  sur les composantes connexes géométriques est donnée sur  $D(\mathbb{Q}_p)/\det K$  par la translation par  $\det(g_1)\det(g_2)$ . L'action de  $\gamma \in I_E$  sur les composantes connexes géométriques est donnée par la translation par  $\chi_{\det \tilde{\mu}}(\gamma)$ .

*Remarque 6.3.2.* Via le théorème d'uniformisation de Rapoport-Zink ([RZ96] chapitre 6) le théorème 6.3.1 fournit une description des composantes connexes géométriques du tube au dessus du lieu basique de certaines variétés de Shimura de type PEL.

**6.4. Composantes connexes des tours de Rapoport-Zink.** Bien sûr, si on connaît les composantes connexes géométriques ainsi que l'action du groupe de Galois dessus, on connaît les composantes connexes.

**Corollaire 6.4.1.** *Soit  $D_0$  le plus petit sous tore de  $D$  contenant l'image de  $\det \circ \tilde{\mu} \in X_*(D)$ . Il y a des bijection naturelles lorsque  $K$  varie*

$$\pi_0(\check{\mathcal{M}}_K) \xrightarrow{\sim} D(\mathbb{Q}_p)/D_0(\mathbb{Z}_p) \det K.$$

L'action de  $(g_1, g_2) \in J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p)$  sur les composantes connexes est donnée sur  $D(\mathbb{Q}_p)/D_0(\mathbb{Z}_p) \det K$  par la translation par  $\det(g_1) \det(g_2)$ .

*Proof.* On a

$$\pi_0(\check{\mathcal{M}}_K) = I_E \backslash \pi_0(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p).$$

Rappelons (cf. section 1.2) que  $\chi_{\det \tilde{\mu}} : I_E \rightarrow D(\mathbb{Q}_p)$  est donné par l'application de réciprocity d'Artin composée avec le morphisme de groupes  $\mathcal{O}_E^\times \rightarrow D(\mathbb{Q}_p)$  induit par le morphisme de tores  $N_{\det \tilde{\mu}} : \text{Res}_{E/\mathbb{Q}_p} \mathbb{G}_m \rightarrow D$ . On vérifie facilement que  $D_0 = \text{Im } N_{\det \tilde{\mu}}$ . Remarquons que tous nos tores sont non-ramifiés sur  $\mathbb{Q}_p$ . On note encore  $D$  pour le modèle entier canonique de  $D$  sur  $\mathbb{Z}_p$ . Alors,  $N_{\det \tilde{\mu}}$  est induit en fibre générique par un morphisme de tores

$$N_{\det \tilde{\mu}} : \text{Res}_{\mathcal{O}_E/\mathbb{Z}_p} \mathbb{G}_m \longrightarrow D.$$

On vérifie par un calcul explicite que le noyau de ce morphisme de tores est connexe et est donc un tore. D'après le théorème de Lang, cela implique que l'image de  $N_{\det \tilde{\mu}} : \mathcal{O}_E^\times \rightarrow D(\mathbb{Z}_p)$  est égale à  $D_0(\mathbb{Z}_p)$ .  $\square$

**Exemple 6.4.2.** Soit  $\delta \in \text{Im } \varkappa$  et  $\check{\mathcal{M}}_K^{[\delta]} = \varkappa^{-1}(\delta)$ . Si  $D_0 = D$ ,  $|\pi_0(\check{\mathcal{M}}_K^{[\delta]})|$  est borné lorsque  $K$  varie. Si  $D_0 \subsetneq D$ ,  $\lim_{K \rightarrow \{e\}} |\pi_0(\check{\mathcal{M}}_K^{[\delta]})| = +\infty$ .

**6.5. Sur l'hypothèse concernant les polygones de Hodge et de Newton.** Supposons que l'on regarde un espace de Rapoport-Zink de type EL lorsque  $F = \mathbb{Q}_p$ , c'est à dire sans structures additionnelles. On a alors  $G = \text{GL}_{n/\mathbb{Q}_p}$ . Dans les théorèmes précédents, la condition concernant les polygones de Hodge et Newton signifie simplement que le groupe  $p$ -divisible que l'on déforme ne possède pas de partie étale, ni de partie multiplicative. Si c'était le cas, la représentation de monodromie du théorème 6.2.1 se factoriserait par un sous-groupe parabolique propre de  $G(\mathbb{Q}_p)$ . De plus, la tour de Rapoport-Zink serait "induite parabolique" à partir d'une tour de Rapoport-Zink de dimension inférieure. Dans le cas des espaces de modules de déformation de groupes  $p$ -divisibles de dimension 1, il s'agit de "l'astuce de Boyer" (cf. [Boy99] et [HT01]). Donc, lorsqu'il n'y a pas de structures additionnelles, l'hypothèse concernant les polygones de Hodge et Newton est nécessaire afin que les théorèmes précédents soient vrais.

Dans le cas général, cette hypothèse est encore nécessaire d'après Mantovan et Shen. Plus précisément, Mantovan montre que si non seulement les polygones de Hodge et de Newton se touchent en un point de rupture du polygone de Newton mais également "ils coïncident avant", alors la représentation de monodromie se factorise par un sous-groupe parabolique et la tour de Rapoport-Zink est induite parabolique. Dans un travail récent de Shen [She], il montre les mêmes résultats lorsque les polygones de Hodge et de Newton se touchent en un point de rupture du polygone de Newton en utilisant la théorie de la filtration de Harder-Narasimhan des schémas en groupes finis et plats.

## 7. APPLICATIONS COHOMOLOGIQUES

On conserve les notations de la section précédente. Dans cette section, on donnera une traduction cohomologique du théorème 6.3.1.

La tour  $(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p)_K$  est munie d'une action de  $J(\mathbb{Q}_p)$  à gauche et d'une action de  $G(\mathbb{Q}_p) \times I_E$  à droite. De plus, pour  $K \subset G(\mathbb{Z}_p)$  et pour un relèvement de Frobenius  $\tilde{\sigma}_E \in \text{Gal}(\bar{E}|E)$ , l'espace  $\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p$  est muni d'une action de  $\tilde{\sigma}_E$  induite par la donnée de descente de Rapoport-Zink:

$$\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p \xrightarrow{\alpha_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p} \sigma_E^* \check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p \xrightarrow{\tilde{\sigma}_E} \check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p$$

où  $\alpha_K : \check{\mathcal{M}}_K \rightarrow \sigma_E^* \check{\mathcal{M}}_K$  est la donnée de descente de Rapoport-Zink. Donc l'action de  $I_E$  à droite sur la tour  $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$  prolonge en une action de  $W_E$  qui commute encore aux actions de  $J(\mathbb{Q}_p)$  et de  $G(\mathbb{Q}_p)$ . Posons  $d := \dim \check{\mathcal{M}}^{an}$ .

**Définition 7.0.1.** On définit

$$H_c^\bullet(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \mathbb{Q}_l) := \varinjlim_U \varprojlim_n H_c^\bullet(U \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \mathbb{Z}/l^n \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}_l$$

la cohomologie à support compact  $l$ -adique de l'espace analytique  $\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p$ , où  $U$  parcourt les ouverts relativement compacts de  $\check{\mathcal{M}}_K$ . Définissons

$$H_c^\bullet(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \bar{\mathbb{Q}}_\ell) := H_c^\bullet(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \mathbb{Q}_l) \otimes \bar{\mathbb{Q}}_\ell.$$

Considérons le système projectif  $(H_c^{2d}(\check{\mathcal{M}}_K, \bar{\mathbb{Q}}_\ell))_K$  avec les morphismes de translation:

$$(\pi_{K',K} \hat{\otimes} \mathbb{C}_p)! : H_c^{2d}(\check{\mathcal{M}}_{K'} \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \bar{\mathbb{Q}}_\ell) \rightarrow H_c^{2d}(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$$

où  $K' \subset K \subset G(\mathbb{Z}_p)$  et  $\pi_{K',K} : \check{\mathcal{M}}_{K'} \rightarrow \check{\mathcal{M}}_K$  le morphisme naturel. Ce système est muni d'une action de  $J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p) \times W_E$  à gauche, avec l'action de  $J(\mathbb{Q}_p)$  donnée par  $(g^{-1})^*$  pour  $g \in J(\mathbb{Q}_p)$ .

**Théorème 7.0.2.** *Supposons la conjecture 6.1.1 vérifiée. Supposons que  $(b, \mu)$  est HN-irréductible. Soit  $\pi$  une  $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible lisse de  $J(\mathbb{Q}_p)$ .*

- Si  $\pi = \chi \circ \det$  est le composé du morphisme déterminant avec un caractère de  $D(\mathbb{Q}_p)$

$$\pi : J(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\det} D(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\chi} \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times,$$

alors la représentation

$$(16) \quad \varinjlim_K \text{Hom}_{J(\mathbb{Q}_p)}(H_c^{2d}(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \bar{\mathbb{Q}}_\ell), \pi)$$

de  $G(\mathbb{Q}_p) \times W_E$  est le caractère suivant:

$$\begin{aligned} G(\mathbb{Q}_p) \times W_E &\rightarrow \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times \\ (g, \gamma) &\mapsto \chi \circ \det(g) \cdot \chi \circ \tilde{\chi}_{\det} \tilde{\mu}(\gamma) \cdot \chi_{cycl}^d(\gamma) \end{aligned}$$

où  $\chi_{cycl}$  est le caractère cyclotomique et  $\tilde{\chi}_{\det} \tilde{\mu} : W_E \rightarrow D(\mathbb{Q}_p)$  est défini dans la remarque 1.2.2.

- si  $\pi \neq \chi \circ \det$ , alors (16) s'annule.

Pour montrer ce théorème, on a besoin du lemme suivant:

**Lemme 7.0.3.** • L'action de  $J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p) \times W_E$  sur

$$V := \varprojlim_K H_c^{2d}(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$$

factorise par

$$J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p) \times W_E \xrightarrow{(\det, \det, \text{Id})} D(\mathbb{Q}_p) \times D(\mathbb{Q}_p) \times W_E.$$

- Désignons par  $\rho : J(\mathbb{Q}_p) \rightarrow \text{GL}(V)$  l'action de  $J(\mathbb{Q}_p)$  sur  $V$  qui factorise par  $D(\mathbb{Q}_p)$ . Par l'abus de notation, on note encore  $\rho : D(\mathbb{Q}_p) \rightarrow \text{GL}(V)$ . Alors on peut décrire explicitement l'action de  $J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p) \times W_E$  comme suit: pour  $(g_1, g_2, \gamma) \in J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p) \times W_E$  et  $v \in V$ ,

$$(g_1, g_2, \gamma) \cdot v = \chi_{cycl}^{-d}(\gamma) \rho(\det(g_1)) \circ \rho(\det(g_2^{-1})) \circ \rho(\tilde{\chi}_{\det} \tilde{\mu}(\gamma^{-1})) v.$$

*Proof.* Posons

$$\begin{aligned} (J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p))^1 &:= \{(g_1, g_2) \in J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p) \mid \det(g_1) = \det(g_2) \in D(\mathbb{Q}_p)\} \\ (J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p))_1 &:= \{(g_1, g_2) \in J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p) \mid \det(g_1^{-1}) = \det(g_2) \in D(\mathbb{Q}_p)\} \end{aligned}$$

On déclare que  $(J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p))^1$  agit trivialement sur  $V$ .

Soient  $(g_1, g_2) \in (J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p))_1$  et  $K \subset G(\mathbb{Z}_p)$  un sous groupe compact ouvert tels que  $g_2^{-1}Kg_2 \subset G(\mathbb{Z}_p)$ . Considérons la correspondance de Hecke:

$$\begin{array}{ccc} & \check{\mathcal{M}}_{K \cap g_2 K g_2^{-1}} & \xrightarrow{(g_1, g_2)} \check{\mathcal{M}}_{g_2^{-1} K g_2 \cap K} \\ \pi_{K \cap g_2 K g_2^{-1}, K} \swarrow & & \searrow \pi_{g_2^{-1} K g_2 \cap K, K} \\ \check{\mathcal{M}}_K & & \check{\mathcal{M}}_K \end{array}$$

Comme le morphisme déterminant est compatible aux actions de  $J(\mathbb{Q}_p)$  et  $G(\mathbb{Q}_p)$ , cela induit une identité sur les composantes connexes géométriques de  $\check{\mathcal{M}}_K$ :

$$\begin{array}{ccccc} D(\mathbb{Q}_p)/\det(K \cap g_2 K g_2^{-1}) & = & \pi_0(\check{\mathcal{M}}_{K \cap g_2 K g_2^{-1}} \hat{\otimes} \mathbb{C}_p) & \xrightarrow{(g_1, g_2)} & \pi_0(\check{\mathcal{M}}_{g_2^{-1} K g_2 \cap K} \hat{\otimes} \mathbb{C}_p) & = & D(\mathbb{Q}_p)/\det(g_2^{-1} K g_2 \cap K) \\ \downarrow & & \downarrow \pi_0(\pi_{K \cap g_2 K g_2^{-1}, K} \hat{\otimes} \mathbb{C}_p) & & \downarrow \pi_0(\pi_{g_2^{-1} K g_2 \cap K, K} \hat{\otimes} \mathbb{C}_p) & & \downarrow \\ D(\mathbb{Q}_p)/\det K & = & \pi_0(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p) & \xrightarrow{\text{Id}} & \pi_0(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p) & = & D(\mathbb{Q}_p)/\det K \end{array}$$

Berkovich montre dans [Ber93] théorème 7.2.1 que le morphisme trace:

$$\text{Tr}_K : H_c^{2d}(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\pi_0(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p)} \overline{\mathbb{Q}}_\ell(-d)$$

est un isomorphisme pour tout  $K \subset G(\mathbb{Z}_p)$  sous groupe ouvert compact. De plus le morphisme trace est compatible à la composition (i.e., pour  $K' \subset K \subset G(\mathbb{Z}_p)$ ,  $\text{Tr}_{K'} = \text{Tr}_K \circ (\pi_{K', K})!$ ). Alors le diagramme précédent couplé avec le morphisme trace pour la tour  $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$  entraîne le diagramme suivant de groupes de cohomologies en degré  $2d$ :

$$\begin{array}{ccc} H_c^{2d}(\check{\mathcal{M}}_{K \cap g_2 K g_2^{-1}} \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \xleftarrow{((g_1^{-1})^*, g_2^*)} & H_c^{2d}(\check{\mathcal{M}}_{g_2^{-1} K g_2 \cap K} \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \\ (\pi_{K \cap g_2 K g_2^{-1}, K} \hat{\otimes} \mathbb{C}_p)! \downarrow & & \downarrow (\pi_{g_2^{-1} K g_2 \cap K, K} \hat{\otimes} \mathbb{C}_p)! \\ H_c^{2d}(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \xleftarrow{\text{Id}} & H_c^{2d}(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \end{array}$$

D'où  $(J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p))^1$  agit trivialement sur  $V$ . En particulier, l'action de  $J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p) \times W_E$  factorise par  $D(\mathbb{Q}_p) \times D(\mathbb{Q}_p) \times W_E$  et de plus pour  $g \in G(\mathbb{Q}_p)$  et  $v \in V$ ,  $g \cdot v = \rho(\det g^{-1})v$ .

De même, on définit

$$\begin{aligned} (J(\mathbb{Q}_p) \times W_E)^1 &:= \{(g, \gamma) \in J(\mathbb{Q}_p) \times W_E \mid \det g = \tilde{\chi}_{\det \mu}(\gamma)\} \\ (J(\mathbb{Q}_p) \times W_E)_1 &:= \{(g, \gamma) \in J(\mathbb{Q}_p) \times W_E \mid (g^{-1}, \gamma) \in (J(\mathbb{Q}_p) \times W_E)^1\} \end{aligned}$$

On montre de la même manière que  $(J(\mathbb{Q}_p) \times W_E)_1$  agit trivialement sur  $\pi_0(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p)$  les composantes connexes géométriques de  $\check{\mathcal{M}}_K$ . Donc l'action de  $(J(\mathbb{Q}_p) \times W_E)^1$  est donnée par le caractère  $\chi_{cycl}^{-d}$  composé avec la projection  $(J(\mathbb{Q}_p) \times W_E)^1 \xrightarrow{\text{Pr}_2} W_E$ . D'où le résultat.  $\square$

*Preuve du théorème 7.0.2.* Remarquons que

$$(17) \quad \varinjlim_K \text{Hom}_{J(\mathbb{Q}_p)}(H_c^{2d}(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell), \pi) \hookrightarrow \text{Hom}_{J(\mathbb{Q}_p)}(\varprojlim_K H_c^{2d}(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p), \pi)$$

car tous les morphismes de translation dans le système projectif  $(H_c^{2d}(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p))_K$  sont surjectifs. D'après le lemme 7.0.3,  $\text{Hom}_{J(\mathbb{Q}_p)}(\varprojlim_K H_c^{2d}(\check{\mathcal{M}} \hat{\otimes} \mathbb{C}_p), \pi)$  s'annule si  $\pi$  ne factorise pas par  $D(\mathbb{Q}_p)$ , d'où le point (2).

Maintenant supposons que  $\pi = \chi \circ \det$  avec  $\chi : D(\mathbb{Q}_p) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$  un caractère lisse. En utilisant le morphisme trace, on a

$$H_c^{2d}(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \simeq c - \text{Ind}_{\det K}^{D(\mathbb{Q}_p)}(\mathbb{1}_{\det K})$$

en tant que  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation de  $J(\mathbb{Q}_p)$  qui factorise par  $D(\mathbb{Q}_p)$ . Donc

$$\begin{aligned} & \text{Hom}_{J(\mathbb{Q}_p)}(H_c^{2d}(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell), \pi) \\ & \simeq \text{Hom}_{D(\mathbb{Q}_p)}(c - \text{Ind}_{\det K}^{D(\mathbb{Q}_p)}(\mathbb{1}_{\det K}), \chi) \\ & = \text{Hom}_{\det K}(\mathbb{1}_{\det K}, \chi|_{\det K}) \\ & = (\chi|_{\det K})^{\det K} \end{aligned}$$

et

$$\varinjlim_K \text{Hom}_{J(\mathbb{Q}_p)}(H_c^{2d}(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell), \pi) = \varinjlim_K (\chi|_{\det K})^{\det K} = \chi$$

Donc (16) est de dimension 1, et le caractère s'est obtenu par l'inclusion (17) couplée avec le lemme 7.0.3.  $\square$

#### REFERENCES

- [And92] Yves André. Mumford-Tate groups of mixed Hodge structures and the theorem of the fixed part. *Compositio Math.*, 82(1):1–24, 1992.
- [Ber93] Vladimir G. Berkovich. Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (78):5–161 (1994), 1993.
- [Boy99] P. Boyer. Mauvaise réduction des variétés de Drinfeld et correspondance de Langlands locale. *Invent. Math.*, 138(3):573–629, 1999.
- [BT65] Armand Borel and Jacques Tits. Groupes réductifs. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (27):55–150, 1965.
- [CF00] Pierre Colmez and Jean-Marc Fontaine. Construction des représentations  $p$ -adiques semi-stables. *Invent. Math.*, 140(1):1–43, 2000.
- [Che13] Miaofen Chen. Le morphisme déterminant pour les espaces de modules de groupes  $p$ -divisibles. *Int. Math. Res. Not.*, 2013(7):1482–1577, 2013.
- [CKV] Miaofen Chen, Mark Kisin, and Eva Viehmann. Connected components of affine Deligne-Lusztig varieties in mixed characteristic. *preprint, arXiv:1307.3845*.
- [Del79] Pierre Deligne. Variétés de Shimura: interprétation modulaire, et techniques de construction de modèles canoniques. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, pages 247–289. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.
- [Del90] P. Deligne. Catégories tannakiennes. In *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, volume 87 of *Progr. Math.*, pages 111–195. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.
- [dJ95a] A. J. de Jong. Crystalline Dieudonné module theory via formal and rigid geometry. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (82):5–96 (1996), 1995.
- [dJ95b] A. J. de Jong. Étale fundamental groups of non-Archimedean analytic spaces. *Compositio Math.*, 97(1-2):89–118, 1995. Special issue in honour of Frans Oort.
- [DMOS82] Pierre Deligne, James S. Milne, Arthur Ogus, and Kuang-ye Shih. *Hodge cycles, motives, and Shimura varieties*, volume 900 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- [DR010] Jean-François Dat, Michael Rapoport, and Sascha Orlik. *Period Domains over Finite and  $p$ -adic Fields*, volume 183 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge university press, 2010.
- [Fal95] Gerd Faltings. Mumford-Stabilität in der algebraischen Geometrie. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*, pages 648–655, Basel, 1995. Birkhäuser.
- [Far04] Laurent Fargues. Cohomologie des espaces de modules de groupes  $p$ -divisibles et correspondances de Langlands locales. *Astérisque*, (291):1–199, 2004. Variétés de Shimura, espaces de Rapoport-Zink et correspondances de Langlands locales.

- [Fon94] Jean-Marc Fontaine. Représentations  $p$ -adiques semi-stables. *Astérisque*, (223):113–184, 1994. With an appendix by Pierre Colmez, *Périodes  $p$ -adiques* (Bures-sur-Yvette, 1988).
- [FR05] Jean-Marc Fontaine and Michael Rapoport. Existence de filtrations admissibles sur des isocristaux. *Bull. Soc. Math. France*, 133(1):73–86, 2005.
- [HT01] Michael Harris and Richard Taylor. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, volume 151 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001. With an appendix by Vladimir G. Berkovich.
- [Kne65] Martin Kneser. Galois-Kohomologie halbeinfacher algebraischer Gruppen über  $p$ -adischen Körpern. I. *Math. Z.*, 88:40–47, 1965.
- [Kot85] Robert E. Kottwitz. Isocrystals with additional structure. *Compositio Math.*, 56(2):201–220, 1985.
- [Kot97] Robert E. Kottwitz. Isocrystals with additional structure. II. *Compositio Math.*, 109(3):255–339, 1997.
- [Mar91] G. A. Margulis. *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, volume 17 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [RZ96] M. Rapoport and Th. Zink. *Period spaces for  $p$ -divisible groups*, volume 141 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.
- [Sen73] Shankar Sen. Lie algebras of Galois groups arising from Hodge-Tate modules. *Ann. of Math. (2)*, 97:160–170, 1973.
- [Ser67] J.-P. Serre. Sur les groupes de Galois attachés aux groupes  $p$ -divisibles. In *Proc. Conf. Local Fields (Driebergen, 1966)*, pages 118–131. Springer, Berlin, 1967.
- [Ser79] Jean-Pierre Serre. Groupes algébriques associés aux modules de Hodge-Tate. In *Journées de Géométrie Algébrique de Rennes. (Rennes, 1978), Vol. III*, volume 65 of *Astérisque*, pages 155–188. Soc. Math. France, Paris, 1979.
- [She] Xu Shen. On the Hodge-Newton filtration for  $p$ -divisible groups with additional structures. *to appear in International Mathematics Research Notices*, doi:10.1093/imrn/rnt036.
- [Str08] Matthias Strauch. Geometrically connected components of Lubin-Tate deformation spaces with level structures. *Pure Appl. Math. Q.*, 4(4, part 1):1215–1232, 2008.
- [Tit71] J. Tits. Représentations linéaires irréductibles d’un groupe réductif sur un corps quelconque. *J. Reine Angew. Math.*, 247:196–220, 1971.
- [Tot96] Burt Totaro. Tensor products in  $p$ -adic Hodge theory. *Duke Math. J.*, 83(1):79–104, 1996.
- [Vie08a] Eva Viehmann. The global structure of moduli spaces of polarized  $p$ -divisible groups. *Doc. Math.*, 13:825–852, 2008.
- [Vie08b] Eva Viehmann. Moduli spaces of  $p$ -divisible groups. *J. Algebraic Geom.*, 17(2):341–374, 2008.
- [Vol10] Inken Vollaard. The supersingular locus of the Shimura variety for  $\mathrm{GU}(1, s)$ . *Canad. J. Math.*, 62(3):668–720, 2010.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, EAST CHINA NORMAL UNIVERSITY, SHANGHAI, 200241, CHINA  
*E-mail address:* mfchen@math.ecnu.edu.cn