

LE MORPHISME DÉTERMINANT POUR LES ESPACES DE MODULES DE GROUPES p -DIVISIBLES

MIAOFEN CHEN

RÉSUMÉ. Soit $\check{\mathcal{M}}$ un espace de modules de groupes p -divisibles introduit par Rapoport et Zink. Supposons que cet espace $\check{\mathcal{M}}$ soit non-ramifié de type EL ou PEL unitaire ou symplectique. Soit $\check{\mathcal{M}}^{\text{rig}}$ la fibre générique de Berthelot de $\check{\mathcal{M}}$. C'est un espace rigide analytique au-dessus duquel il existe une tour de revêtements étales finis $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$ qui classifient les structures de niveau. On définit un morphisme déterminant \det_K de la tour $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$ vers une tour d'espaces rigides analytiques étales de dimension 0 associée au cocentre du groupe réductif relié à cet espace. C'est un analogue local en des places non-archimédiennes du morphisme déterminant pour les variétés de Shimura défini par Deligne.

ABSTRACT. Let $\check{\mathcal{M}}$ be a moduli space of p -divisible groups introduced by Rapoport and Zink. Assume that $\check{\mathcal{M}}$ is unramified of EL or PEL type which is unitary or symplectic. Let $\check{\mathcal{M}}^{\text{rig}}$ be the generic fiber of Berthelot of $\check{\mathcal{M}}$. This is a rigid analytic space over which there exists a tower of finite étale coverings $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$ classifying the level structures. We define a determinant morphism \det_K from the tower $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$ to a tower of rigid analytic spaces of dimension 0 associated to the cocenter of the reductive group related to the space $\check{\mathcal{M}}$. This is a local analogue on the nonarchimedean places of the determinant morphism for Shimura varieties defined by Deligne.

1. INTRODUCTION

Soit (G, X) une donnée de Shimura, avec G un groupe réductif défini sur \mathbb{Q} et X la classe de $G(\mathbb{R})$ -conjugaison d'un homomorphisme $h : \text{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} \mathbb{G}_m \rightarrow G_{\mathbb{R}}$ vérifiant certains axiomes. Notons E le corps réflex de cette donnée. Soit $(\text{Sh}_K(G, X))_K$ la tour de variétés de Shimura associée. Il s'agit d'une tour de variétés algébriques lisses sur E indexées par des sous-groupes compacts ouverts K de $G(\mathbb{A}_f)$ suffisamment petits. On a une description adélique de la tour $(\text{Sh}_K(G, X))_K$ sur \mathbb{C} :

$$\text{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q}) \backslash X \times G(\mathbb{A}_f) / K.$$

Il existe un morphisme composé naturel sur cette tour :

$$\begin{aligned} G(\mathbb{Q}) \backslash X \times G(\mathbb{A}_f) / K &\xrightarrow{\sim} \mathbb{G}(\mathbb{Q})_+ \backslash X^+ \times G(\mathbb{A}_f) / K &\rightarrow D(\mathbb{Q})^\dagger \backslash D(\mathbb{A}_f) / \det K \\ (x, g) &\mapsto \det(g) \end{aligned}$$

où

- $G(\mathbb{Q})_+ = G(\mathbb{Q}) \cap G(\mathbb{R})_+$, avec $G(\mathbb{R})_+$ désigne le sous-groupe des éléments de $G(\mathbb{R})$ tel que les images desquels via $G(\mathbb{R}) \xrightarrow{ad} G^{ad}(\mathbb{R})$ soit dans la composante connexe d'unité $G^{ad}(\mathbb{R})^+$, où G^{ad} est le quotient de G par son centre et ad est la projection naturelle.
- X^+ est une composante connexe de X , et la première flèche dans le morphisme composé est le morphisme naturel.
- $D = G/G^{\text{der}}$ est le cocentre de G et $\det : G \rightarrow D$ est la projection naturelle.
- $D(\mathbb{Q})^\dagger := D(\mathbb{Q}) \cap \text{Im}(Z(\mathbb{R}) \xrightarrow{\det} D(\mathbb{R}))$ avec Z le centre de G .

Ce morphisme composé est appelé morphisme déterminant. Deligne montre dans [Del79] que si le groupe dérivé G^{der} de G est simplement connexe, alors les fibres du morphisme déterminant sont les composantes connexes géométriques de la tour $(\text{Sh}_K(G, X))_K$. De plus, le morphisme déterminant induit une bijection

$$(1) \quad \pi_0(\text{Sh}_K(G, X)_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\sim} D(\mathbb{Q})^\dagger \backslash D(\mathbb{A}_f) / \det(K).$$

Cette bijection est compatible à l'action par correspondances de Hecke. Deligne décrit alors l'action de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|E)$ associée sur le membre de droite de (1) induit par l'action de Galois sur l'ensemble des composantes connexes géométriques $\pi_0(\text{Sh}_K(G, X)_{\mathbb{C}})$ sur le membre de gauche. Cette action est donnée par une loi de réciprocité associée au tore D faisant intervenir le corps de classe global de E et la norme reflex associée au cocaractère composé $\det \circ \mu \in X_*(D)$ où μ est le cocaractère de Hodge associé à la donnée de Shimura.

Dans cette article, nous construisons un morphisme déterminant pour les espaces de modules de groupes p -divisibles introduits par Rapoport et Zink ([RZ96]) qui sont des analogues locaux en un premier p des variétés de Shimura.

On se restreint dans cet article aux espaces de Rapoport-Zink non ramifiés de type E.L et P.E.L unitaires ou symplectiques. Dans le cas le plus simple, c'est-à-dire pour un espace de Rapoport-Zink sans structure additionnelle associé à un groupe linéaire sur \mathbb{Q}_p , l'espace de modules $\check{\mathcal{M}}$ est défini comme un foncteur

$$\check{\mathcal{M}} : \text{Nil}_W \rightarrow \mathcal{E}ns$$

où $W = W(\overline{\mathbb{F}}_p)$ est l'anneau des vecteurs de Witt et Nil_W est la catégorie des $\text{Spec}(W)$ -schémas S tels que p soit localement nilpotent sur S . Un groupe p -divisible \mathbb{X} sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ étant fixé, le foncteur $\check{\mathcal{M}}$ associe à $S \in \text{Nil}_W$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de couples (X, ρ) où X est un groupe p -divisible sur S et $\rho : \mathbb{X} \times_{\text{Spec} \overline{\mathbb{F}}_p} \overline{S} \rightarrow X \times_S \overline{S}$ est une quasi-isogénie avec $\overline{S} = S \times_{\text{Spec}(W)} \text{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_p)$. Pour la définition générale, on renvoie aux définitions 2.4 et 2.4.3.

En général, un espace de Rapoport-Zink non-ramifié $\check{\mathcal{M}} = \check{\mathcal{M}}(G, b, \mu)$ de type EL ou PEL symplectique ou unitaire est défini à partir d'une donnée de Rapoport-Zink (G, b, μ) vérifiant certaines conditions :

- G est un groupe réductif non-ramifié sur \mathbb{Q}_p qui est soit une restriction des scalaires d'un groupe linéaire, soit un groupe de similitudes unitaires ou symplectiques,
- b est un élément de $G(W(\overline{\mathbb{F}}_p)_{\mathbb{Q}})$ dont on note \bar{b} la classe de σ -conjugaison,
- $\mu : \mathbb{G}_{m, \overline{\mathbb{Q}}_p} \rightarrow G_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ est un cocaractère minuscule de G dont on note $\bar{\mu}$ la classe de conjugaison.

L'espace $\check{\mathcal{M}}$ ne dépend que de \bar{b} et $\bar{\mu}$. L'élément \bar{b} fixe la classe d'isomorphisme du module de Dieudonné covariant du groupe p -divisible avec G -structure que l'on déforme tandis que $\bar{\mu}$ fixe le polygone de Hodge arithmétique avec structures additionnelles. On demande de plus dans les données précédentes que $\bar{b} \in B(G, \mu)$, l'ensemble de Kottwitz (cf. [Kot97] ou 2.1.2), cela afin que nos espaces de modules soient non-vides et que le module de Tate rationnel de la déformation universelle soit muni d'une G -structure (trivialité du torseur des périodes). Notons E le corps de définition de $\bar{\mu}$, le corps reflex, et \check{E} le complété de l'extension maximale non-ramifiée de E dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$. L'espace $\check{\mathcal{M}}$ est défini sur $\text{Spf}(\mathcal{O}_{\check{E}})$ et est muni d'une donnée de descente de \check{E} à E .

Rapoport et Zink montrent que $\check{\mathcal{M}} = \check{\mathcal{M}}(G, b, \mu)$ est un schéma formel localement formellement de type fini sur $\text{Spf}(\mathcal{O}_{\check{E}})$. Il est muni d'une action de $J(\mathbb{Q}_p)$, le σ -centralisateur de b , où J est une forme intérieure d'un sous groupe de Levi de G . Il s'agit du groupe des automorphismes par quasi-isogénies du groupe p -divisible avec structures additionnelles que l'on déforme.

Fixons un modèle entier réductif de G et soit $G(\mathbb{Z}_p)$ le sous-groupe compact hyperspécial associé dans $G(\mathbb{Q}_p)$. Soit $\check{\mathcal{M}}^{rig}$ la fibre générique de Berthelot de $\check{\mathcal{M}}$ ([dJ95a]). C'est un \check{E} -espace rigide au dessus duquel il existe une tour d'espaces rigides analytiques $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$, K parcourant les sous-groupes ouverts de $G(\mathbb{Z}_p)$. Cette tour forme un revêtement pro-galoisien de $\check{\mathcal{M}}^{rig}$ de groupe $G(\mathbb{Z}_p)$. Le groupe $J(\mathbb{Q}_p)$ agit à gauche sur chaque $\check{\mathcal{M}}_K$ pour tout K . De plus, la tour $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$ est munie d'une action à droite de $G(\mathbb{Q}_p)$ par correspondances de Hecke, action étendant celle de $G(\mathbb{Z}_p)$. Cette action commute à celle de $J(\mathbb{Q}_p)$.

Soient (G, b, μ) comme précédemment, $D = G/G^{der}$ l'abélianisé de G , qui est un tore p -adique non-ramifié, et $\det : G \rightarrow D$ la projection. Si \bar{x} est un point géométrique de $\check{\mathcal{M}}^{rig}$, notons $\pi_1(\check{\mathcal{M}}^{rig}, \bar{x})$ le groupe fondamental profini classifiant les revêtements étales finis de la composante connexe de \bar{x} dans $\check{\mathcal{M}}^{rig}$. Le module de Tate de la déformation universelle sur $\check{\mathcal{M}}$ spécialisée en \bar{x} munie de sa

G -structure définit une représentation de monodromie

$$\rho_{\bar{x}} : \pi_1(\check{\mathcal{M}}^{rig}, \bar{x}) \rightarrow G(\mathbb{Q}_p)$$

bien définie à $G(\mathbb{Q}_p)$ -conjugaison près. La construction du morphisme déterminant consiste à expliciter la représentation de monodromie composée

$$\rho_{\bar{x}} : \pi_1(\check{\mathcal{M}}^{rig}, \bar{x}) \longrightarrow G(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\det} D(\mathbb{Q}_p).$$

Néanmoins, cette représentation de monodromie n'est pas en général associée à un groupe p -divisible. Lorsqu'on regarde des espaces sans structures additionnelles, c'est-à-dire que G est un groupe linéaire sur \mathbb{Q}_p , cela résulte de ce qu'en général le déterminant d'une représentation cristalline à poids de Hodge-Tate 0 ou 1 a un poids de Hodge-Tate qui n'est pas nécessairement 0 ou 1. Ainsi, si $K|W(\overline{\mathbb{F}}_p)_{\mathbb{Q}}$ est une extension de degré fini et H est un groupe p -divisible de dimension d , alors $\det V_p(H) \simeq \mathbb{Q}_p(d)$ qui n'est pas associé à un groupe p -divisible si $d \neq 0, 1$.

Du point de vue de la donnée de Rapoport-Zink (G, b, μ) le phénomène précédent se traduit de la façon suivante. À cause de la normalisation du Frobenius et de la filtration de Hodge des modules de Dieudonné covariants, pour définir un morphisme déterminant, on utilise plutôt dans la suite la donnée $(p^{-1}b, \tilde{\mu})$, où $\tilde{\mu} := \nu_G \cdot \mu$ avec $\nu_G : \mathbb{G}_m \rightarrow G$ le cocaractère central $z \mapsto z^{-1} \text{Id}$ (si $(N, \varphi, \text{Fil}^{\bullet} N_K)$ est le module de Dieudonné filtré covariant associé à un groupe p -divisible H sur \mathcal{O}_K , $K|\mathbb{Q}_p$ étant de valuation discrète à corps résiduel parfait, et V_{cris} est le foncteur de Fontaine covariant, alors $V_p(H) = V_{cris}(N, p^{-1}\varphi, \text{Fil}^{\bullet-1} N_K)$). La donnée $(G, p^{-1}b, \tilde{\mu})$ induit une nouvelle donnée $(D, \det(p^{-1}b), \det \circ \tilde{\mu})$. Ici, $\det(p^{-1}b)$ est déterminé par $\det \circ \tilde{\mu}$ d'après la condition de Kottwitz. Donc on peut l'enlever de ce triplet. Cette donnée $(D, \det \circ \tilde{\mu})$ n'est pas en général associée à une donnée de Rapoport-Zink de type groupe p -divisible telle que définie dans [RZ96]. Cependant on peut lui associer d'une façon ad-hoc une tour d'espaces de Rapoport-Zink toriques sur \check{E}

$$(\check{\mathcal{M}}(D, \det \circ \tilde{\mu})_K)_{K \subset D(\mathbb{Q}_p)}$$

qui servira comme le but du morphisme déterminant.

Il s'agit d'une tour de \check{E} -espaces rigides étales de dimension 0, c'est à dire une union disjointe de spectres d'extensions de degré fini de \check{E} . Elle est munie d'une action de $D(\mathbb{Q}_p) \times D(\mathbb{Q}_p)$ (dans ce contexte abélien, les groupes J et G coïncident). On a de plus

$$\check{\mathcal{M}}(D, \det \circ \tilde{\mu})_K(\check{E}) = D(\mathbb{Q}_p)/K$$

où l'action de $D(\mathbb{Q}_p) \times D(\mathbb{Q}_p)$ est donnée par translations et celle de l'inertie $\text{Gal}(\check{E}|\check{E})$ de E par la théorie du corps de classe local via une norme reflex associée à μ . On peut également définir une donnée de descente de \check{E} à E sur ces espaces.

Le résultat principal de cet article est l'existence d'un morphisme déterminant entre des tours d'espaces rigides.

Théorème (4.4.1, 5.2.1 et 5.3.3). *Via le morphisme $(\det, \det) : J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p) \rightarrow D(\mathbb{Q}_p) \times D(\mathbb{Q}_p)$ il existe un morphisme $J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant de tours d'espaces rigides*

$$\det_K : (\check{\mathcal{M}}_K(G, b, \mu))_K \longrightarrow (\check{\mathcal{M}}_{\det K}(D, \det \tilde{\mu}))_K$$

où K parcourt les sous-groupes ouverts de $G(\mathbb{Z}_p)$. De plus, ce morphisme est compatible à la donnée de descente de Rapoport-Zink.

Dans les futures travaux, nous montrons que les fibres géométrique du morphisme \det_K sont les composantes connexes géométriques de $\check{\mathcal{M}}_K(G, b, \mu)$.

Restreignons-nous maintenant pour simplifier les notations au cas de type EL, c'est à dire $G = \text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \text{GL}_n$ où $F|\mathbb{Q}_p$ est non-ramifiée. La donnée de la classe de conjugaison $\bar{\mu}$ est alors équivalente à la donnée d'un uplet d'entiers $(p_{\tau}, q_{\tau})_{\tau \in I_F}$ où I_F désigne les plongements de F dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ et $p_{\tau} + q_{\tau} = n$. Soit \mathcal{LT} un groupe de Lubin-Tate sur \mathcal{O}_F associé à $F|\mathbb{Q}_p$. Notons $T_p(\mathcal{LT})$ son module de Tate que l'on voit comme un \mathcal{O}_F -système local p -adique étale de rang 1 sur $\text{Sp}(\mathcal{O}_F)$. Tout plongement $\tau : F \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$

est à valeurs dans \check{E} (le corps F est un corps abstrait tandis que E est par définition plongé dans une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_p$ de \mathbb{Q}_p que l'on a fixée depuis le début). Posons alors

$$\mathcal{L}_{\check{\mu}} = \bigotimes_{\tau \in I_F} \tau^* T_p(\mathcal{L}\mathcal{T})^{\otimes p\tau}.$$

C'est un \mathcal{O}_F -système local p -adique étale de rang 1 sur $\mathrm{Sp}(\check{E})$. La représentation galoisienne associée de l'inertie de E , $\mathrm{Gal}(\check{E}|\check{E})$, est le caractère

$$\chi_{\det \check{\mu}} = \prod_{\tau} \chi_{\mathcal{L}\mathcal{T}\tau}^{p\tau} : \mathrm{Gal}(\check{E}|\check{E}) \longrightarrow \mathcal{O}_F^\times$$

où $\chi_{\mathcal{L}\mathcal{T}\tau}$ est le caractère de Lubin-Tate associé au plongement τ . Par exemple, lorsque $F = \mathbb{Q}_p$, $\mathcal{L}_{\check{\mu}} = \mathbb{Z}_p(d)$ où d est la dimension du groupe p -divisible que l'on déforme et $\chi_{\det \check{\mu}}$ est la puissance d -ième du caractère cyclotomique.

Le théorème précédent est alors une conséquence du théorème plus précis qui suit.

Théorème (4.4.2). *Notons $f_K : \check{\mathcal{M}}_K \rightarrow \mathrm{Sp} \check{E}$ le morphisme structural. Soit \mathcal{T}_K le \mathcal{O}_F -système local étale sur $\check{\mathcal{M}}_K$ qui est le module de Tate de la déformation universelle.*

Pour tout K , il existe un isomorphisme de \mathcal{O}_F -systèmes locaux étales

$$u_K : \det_{\mathcal{O}_F} \mathcal{T}_K \xrightarrow{\sim} f_K^* \mathcal{L}_{\check{\mu}}$$

vérifiant les quelques propriétés de compatibilité.

Pour montrer le théorème 4.4.2, l'outil principal est un théorème de comparaison relatif entre module de Tate et module de Dieudonné filtré des groupes p -divisibles sur des bases très générales ([Che]) qui est une généralisation lui-même d'un tel théorème de comparaison de Faltings sur la base d'un anneau de valuation discrète complet de caractéristique inégale ([Fal99]). Plus précisément, soit R une \mathbb{Z}_p -algèbre noethérienne, p -adiquement complète, normale, intègre et sans p -torsion. Fixons une clôture algébrique de $\mathrm{Frac}(R)$. Soit \overline{R} la fermeture intégrale de R dans l'extension galoisienne maximale de $\mathrm{Frac}(R)$ étale au-dessus de $R[1/p]$. Posons $S = \varprojlim_{\mathbb{N}} \overline{R}/p\overline{R}$ où les applications de transition sont le Frobenius. Soit $W(S)$ l'anneau des vecteurs de Witt. On a une application $\theta : W(S) \rightarrow \widehat{\overline{R}}$ de Fontaine, où $\widehat{\overline{R}}$ est le complété p -adique de \overline{R} . Soit $A_{\mathrm{cris}}(\overline{R})$ l'anneau de Fontaine qui est le complété de l'enveloppe à puissances divisées de $(W(S), \ker(\theta))$ par rapport à sa filtration à puissances divisées. Il est muni d'un Frobenius cristallin φ , d'une filtration et d'une action de

$$\Gamma := \mathrm{Gal}(\widehat{\overline{R}}/R) = \pi_1(\mathrm{Spec}(R[1/p]), \overline{\eta})$$

où $\overline{\eta}$ est le point géométrique au dessus du point générique associé au choix de la clôture algébrique de $\mathrm{Frac}(R)$. De plus l'application θ s'étend en une application surjective :

$$\theta : A_{\mathrm{cris}}(\overline{R}) \twoheadrightarrow \widehat{\overline{R}}.$$

Soit X un groupe p -divisible sur R . Soit \tilde{X} un relèvement de X sur $A_{\mathrm{cris}}(\overline{R})$. Soit $E(\tilde{X})$ l'extension vectorielle universelle de \tilde{X} , c.f. Messing [Mes72]. Posons

$$\mathbb{E} := \mathrm{Lie} E(\tilde{X})$$

qui ne dépend pas du choix du relèvement de X . Il s'agit de l'évaluation du cristal de Dieudonné covariant de X sur l'épaississement $\theta : A_{\mathrm{cris}}(\overline{R}) \rightarrow \widehat{\overline{R}}$. Le $A_{\mathrm{cris}}(\overline{R})$ -module \mathbb{E} possède une \mathbb{N} -filtration, une action de Frobenius semi-linéaire φ et une action de Galois $\Gamma := \mathrm{Gal}(\overline{R}/R)$. Il est démontré dans ([Che]) que si $\mathrm{Lie} X$ et $\mathrm{Lie}(X^\vee)$ sont libres, il existe alors un isomorphisme de $(B_{\mathrm{cris}}(\overline{R}), \varphi, \Gamma)$ -modules filtrés

$$V_p(X_{\overline{\eta}}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\mathrm{cris}}(\overline{R}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{E}[\frac{1}{p^i}]$$

qui est appelé application de périodes du groupe p -divisible X .

Nous indiquons maintenant comment construire l'isomorphisme $u_G(\mathbb{Z}_p)$ du théorème 4.4.2 cité précédemment au niveau local en utilisant ce théorème de comparaison dans le cas EL. Soit $S = \mathrm{Spf}(R)$ un schéma formel affine avec R une $\mathcal{O}_{\check{E}}$ -algèbre topologiquement de type fini sans p -torsion intègre normale. Soit $(X, \rho) \in \check{\mathcal{M}}(S)$ avec X un groupe p -divisible sur R muni d'une action de \mathcal{O}_F et $\rho : \mathbb{X} \times_{\mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_p)} \mathrm{Spec}(R/pR) \rightarrow X \times_{\mathrm{Spec}(R)} \mathrm{Spec}(R/pR)$ une quasi-isogénie tel que le morphisme

$S \rightarrow \check{\mathcal{M}}$ induit une immersion ouverte $S^{rig} \hookrightarrow \check{\mathcal{M}}^{rig}$. On suppose de plus que $\text{Lie } X$ et $\text{Lie } X^\vee$ soient libres. On peut construire l'isomorphisme composé de $B_{cris}(\bar{R})$ -modules suivant :

$$V_p(X) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\bar{R}) \xrightarrow[\sim]{\pi_1} \mathbb{E}[\frac{1}{pt}] \xleftarrow[\sim]{\rho_*} \mathbb{D}(\check{X}) \otimes_W B_{cris}(\bar{R}) \xleftarrow[\sim]{\pi_2} V_p(\check{X}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\bar{R})$$

où :

- π_1 est l'application de périodes de X
- π_2 est l'application de périodes de \check{X} à laquelle on a appliqué $(-) \otimes_{B_{cris}(\mathcal{O}_{\bar{E}})} B_{cris}(\bar{R})$
- ρ_* est induit par la quasi-isogenie ρ .

L'isomorphisme composé précédent est compatible à l'action de Frobenius φ et à l'action de Galois Γ . De plus, π_1 et π_2 sont compatibles à la filtration, mais la flèche au milieu ρ_* n'est a priori pas compatible à la filtration. Cependant, il est devenu compatible à la filtration après application du déterminant $\det_{F \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}}(-)$. Du coup, après avoir appliqué le déterminant $\det_{F \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}}(-)$ à l'isomorphisme composé précédent, on obtient un l'isomorphisme de $(B_{cris}, \varphi, \Gamma)$ -modules filtré. Puis on applique le foncteur $\text{Fil}^0(-)^{\varphi=\text{Id}}$ pour obtenir un isomorphisme

$$\beta : \det_F V_p(X) \xrightarrow{\sim} \det_F V_p(\check{X})$$

en utilisant $\text{Fil}^0(B_{cris}(\bar{R}))^{\varphi=\text{Id}} = \mathbb{Q}_p$ d'après Fontaine et Tsuji ([Tsu99]). En multipliant β par une puissance de p , on obtient un isomorphisme :

$$p^{\text{ht}(\rho)/d} \beta : \det_{\mathcal{O}_F} T_p(X) \xrightarrow{\sim} \det_{\mathcal{O}_F} T_p(\check{X}).$$

Cela induit un isomorphisme de \mathcal{O}_F -systèmes locaux

$$u : \det_{\mathcal{O}_F} \mathcal{T}_{S^{rig}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{\bar{\mu}}$$

en fixant un isomorphisme entre $\det_{\mathcal{O}_F} T_p(\check{X})$ et la fibre $\mathcal{L}_{\bar{\mu}}$ au point géométrique $\text{Spec}(\bar{E}) \rightarrow \text{Spec}(\check{E})$.

On obtient l'isomorphisme $u_{G(\mathbb{Z}_p)}$ sur $\check{\mathcal{M}}^{rig}$ en collant les morphismes locaux u précédents à l'aide de la théorie de Raynaud des modèles entiers des espaces rigides. Les isomorphismes $(u_K)_K$ sont obtenus par le tiré en arrière de l'isomorphisme $u_{G(\mathbb{Z}_p)}$ par les morphismes structuraux $\check{\mathcal{M}}_K \rightarrow \check{\mathcal{M}}^{rig}$.

Dans le cas PEL unitaire, la preuve du théorème 4.4.2 est déduit du cas EL. Cependant dans le cas PEL symplectique, la preuve du théorème 4.4.2 est beaucoup plus simple que dans les autres cas. Dans ce cas là, on n'a pas besoin d'utiliser le théorème de comparaison pour la construction de $(u_K)_K$. Ils existent déjà, car $\det : G \rightarrow \text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \mathbb{G}_m$ se factorise par le caractère de similitudes $c : G \rightarrow \mathbb{G}_m$.

A la fin de cet article, on interprète le théorème 4.4.2 précédent en termes de \mathbb{Q}_p -systèmes locaux de de Jong sur l'espaces des périodes. Plus précisément, soit $\check{\mathcal{M}}^{an}$ la fibre générique de $\check{\mathcal{M}}$ comme \check{E} -espace analytique de Berkovich. Soit

$$\check{\pi} : \check{\mathcal{M}}^{an} \longrightarrow \check{\mathcal{F}}^{an}$$

le morphisme de périodes ([RZ96] chap. 5). Ici, $\check{\mathcal{F}}^{an}$ est l'espace analytique associé à une Grassmannienne p -adique. Notons $\check{\mathcal{F}}^a$ l'image de $\check{\pi}$, un ouvert de $\check{\mathcal{F}}^{an}$ appelé ouvert admissible. D'après de Jong ([dJ95b]) le \mathbb{Q}_p -système local $J(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant défini par le module de Tate rationnel descend en un \mathbb{Q}_p -système local $J(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant sur $\check{\mathcal{F}}^a$. Ce système local est muni d'une G -structure, c'est à dire qu'il est un G -système local $J(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant que l'on note \mathcal{E} . Si $\det : G \rightarrow D$, les résultats précédents sont équivalents à une description explicite du D -système local $J(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant $\det_* \mathcal{E}$. Après avoir oublié de l'action de $J(\mathbb{Q}_p)$ cela s'interprète en termes de représentations de monodromie du groupe fondamental de de Jong de $\check{\mathcal{F}}^a$. Ces représentations de monodromie sont à valeurs dans $G(\mathbb{Q}_p)$ et on décrit ces représentations lorsque composées avec $\det : G(\mathbb{Q}_p) \rightarrow D(\mathbb{Q}_p)$.

Cet article fait partie de ma thèse sous la direction de Laurent Fargues. Je profite de cette occasion de lui exprimer ma gratitude sincère. Cet article n'aurait jamais vu le jour sans lui.

2. ESPACES DE RAPOPORT-ZINK DE TYPE E.L. ET P.E.L. ET LA TOUR D'ESPACES RIGIDES

Fixons une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}_p}$ de \mathbb{Q}_p . Soit $\overline{\mathbb{F}_p}$ la clôture algébrique de \mathbb{F}_p associée. Notons $W = W(\overline{\mathbb{F}_p})$ et $L = W \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ le complété p -adique de l'extension maximale non ramifiée de \mathbb{Q}_p dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$. L'automorphisme σ est le Frobenius de l'extension $L|\mathbb{Q}_p$.

2.1. Rappels sur des définitions et résultats de Kottwitz et Rapoport-Richartz. Rappelons quelques définitions dues à Kottwitz ([Kot85] et [Kot97]).

Définition 2.1.1 ([Kot85]). *Soit H un groupe algébrique sur \mathbb{Q}_p . On désigne par $B(H)$ l'ensemble des classes de σ -conjugaison dans $H(L)$, où deux éléments $b_1, b_2 \in H(L)$ sont dits σ -conjugués s'il existe un $g \in H(L)$ tel que $b_1 = g^{-1}b_2\sigma(g)$. Pour $b \in H(L)$, on notera $\bar{b} \in B(H)$ sa classe de σ -conjugaison.*

Soit H un groupe réductif quasi-déployé sur \mathbb{Q}_p et $A \subset T \subset B$ un triplet où B est un sous-groupe de Borel, T un tore maximal dans G et A un tore déployé maximal. À $b \in H(L)$ est associé un foncteur exact compatible au produit tensoriel

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_b : \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p} H &\longrightarrow \text{Isoc}_{\overline{\mathbb{F}_p}} \\ (V, \rho) &\longmapsto (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} L, b\sigma) \end{aligned}$$

de la catégorie des représentations linéaires de H vers la catégorie des $\overline{\mathbb{F}_p}$ -isocristaux. Soit \mathbb{D} le pro-tore des pentes, $X^*(\mathbb{D}) = \mathbb{Q}$. Il existe alors un unique morphisme

$$\nu_b : \mathbb{D} \longrightarrow H_L,$$

le morphisme des pentes, tel que pour tout $(V, \rho) \in \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p} H$, $\rho \circ \nu_b$ fournisse la \mathbb{Q} -gradation de Dieudonné-Manin de V_L pour le Frobenius $b\sigma$. En fait, le morphisme ν_b est défini sur \mathbb{Q}_p^{nr} , l'extension maximale non-ramifiée de \mathbb{Q}_p dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$, et de plus sa classe de conjugaison est définie sur \mathbb{Q}_p . Cette classe de conjugaison ne dépend elle-même que de la classe de σ -conjugaison de b . Le groupe H étant quasi-déployé cela définit donc une application

$$\begin{aligned} B(H) &\longrightarrow X_*(A)_{\mathbb{Q}}^+ \\ \bar{b} &\longmapsto \nu_{\bar{b}} \end{aligned}$$

où $X_*(A)_{\mathbb{Q}}^+$ est la chambre de Weyl positive dans $X_*(A)_{\mathbb{Q}} = \text{Hom}(\mathbb{D}, A)$ relativement au choix du sous-groupe de Borel. Supposons maintenant fixé un cocaractère

$$\mu : \mathbb{G}_{m, \overline{\mathbb{Q}_p}} \longrightarrow H_{\overline{\mathbb{Q}_p}}$$

à $H(\overline{\mathbb{Q}_p})$ -conjugaison près. On peut donc supposer que $\mu \in X_*(T)^+$. Supposons maintenant, ce qui sera le cas dans tout ce qui suit, que H^{der} est simplement connexe. Soit $D = H/H^{der}$ le cocentre. Notons $\Gamma = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|\mathbb{Q}_p)$. Kottwitz définit dans la section 6 de [Kot97] deux éléments :

- $\mu_1 \in X_*(D)_{\Gamma}$ l'image dans les coinvariants sous Galois de μ composé avec la projection $H \twoheadrightarrow D$,
- $\mu_2 \in X_*(A)_{\mathbb{Q}}^+$, le barycentre de l'orbite de Galois de μ , c'est à dire

$$\mu_2 = \frac{1}{[E : \mathbb{Q}_p]} \sum_{\gamma \in \text{Gal}(E|\mathbb{Q}_p)} \mu^{\gamma}$$

où $E|\mathbb{Q}_p$ est galoisienne suffisamment grande.

Rappelons que d'après ([Kot85] chap. 2) il existe un isomorphisme canonique de groupes

$$X_*(D)_{\Gamma} \xrightarrow{\sim} B(D).$$

On note alors

$$\kappa(\bar{b}) \in X_*(D)_{\Gamma}$$

l'élément correspondant à l'image de \bar{b} via la projection $B(H) \rightarrow B(D)$.

Définition 2.1.2 ([Kot97] chap. 6). *On note $B(H, \mu)$ l'ensemble des $\bar{b} \in B(H)$ vérifiant :*

(1) Dans la chambre de Weyl $X_*(A)_{\mathbb{Q}}^+$ on a

$$\nu_{\bar{b}} \leq \mu_2$$

au sens où $\mu_2 - \nu_{\bar{b}}$ est une combinaison linéaire à coefficients rationnels positifs de coracines positives.

(2) On a l'égalité

$$\kappa(\bar{b}) = \mu_1.$$

Procédons à quelques remarques concernant cette définition. Le point (1) de la définition précédente implique que l'image de $\kappa(\bar{b})$ et de μ_1 dans $X_*(D)_{\Gamma} \otimes \mathbb{Q} = X_*(D)_{\mathbb{Q}}^{\Gamma}$ coïncident. Ainsi, si le point (1) est vérifié, $\kappa(\bar{b}) - \mu_1 \in X_*(D)_{\Gamma, \text{tor}}$. D'après [Kot84] il existe un isomorphisme canonique

$$H^1(\mathbb{Q}_p, H) \xrightarrow{\sim} X_*(D)_{\Gamma, \text{tor}}.$$

On en déduit la remarque suivante : si $H^1(\mathbb{Q}_p, H)$ est trivial alors dans la définition 2.1.2, la condition (2) est inutile. Ce sera le cas pour les données de type E.L. dans la section 2.2. Ce ne sera pas le cas pour les données de type P.E.L. dans la section 2.3.

Pour les groupes classiques, les éléments de $X_*(A)_{\mathbb{Q}}^+$ paramètrent des polygones convexes à pentes rationnelle satisfaisant certaines symmétries (symmétries des pentes λ et $1 - \lambda$ pour les groupes symplectiques par exemple). Le polygone associé à $\kappa(\bar{b})$ est un polygone du type Newton et celui associé à μ_2 un polygone de type Hodge. En gros, la définition 2.1.2 se scinde alors en deux parties :

- La condition (1) qui affirme que le polygone de Newton est au dessus du polygone de Hodge.
- La condition (1) étant assumée, la condition (2) affirme qu'un certain H -torseur dont la classe $\kappa(\bar{b}) - \mu_1 \in H^1(\mathbb{Q}_p, H)$ est trivial. On appelle ce toseur le toseur des périodes.

L'ensemble $B(H, \mu)$ intervient dans la suite afin d'assurer que certains espaces de modules de groupes p -divisibles sont non vides. Plus précisément on a le résultat suivant de Rapoport-Richartz. Supposons H non-ramifié. Soit $\Lambda_0 \in \mathcal{BT}(H)$ un sommet hyperspécial dans l'immeuble de Bruhat-Tits de H . Pour les groupes classiques, Λ_0 est un réseau muni de structures additionnelles satisfaisant une relation d'autodualité dans le cas des groupes unitaires, symplectiques ou orthogonaux. Soit $\Lambda_0 \otimes \mathcal{O}_L \in \mathcal{BT}(H_L)$ le sommet correspondant dans l'immeuble de H_L et \mathcal{V} la $G(L)$ -orbite de $\Lambda_0 \otimes \mathcal{O}_L$. Il y a une application

$$\text{inv} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow X_*(T)^+$$

donnant la « position relative de deux réseaux » dans l'orbite \mathcal{V} . Étant donné $b \in H(L)$ et $\Lambda \in \mathcal{V}$ on définit le polygone de Hodge arithmétique de $(\Lambda, b\sigma)$ comme étant

$$\text{inv}(\Lambda, b\sigma\Lambda) \in X_*(T)^+.$$

On a alors le théorème suivant de Rapoport-Richartz qui généralise l'inégalité classique de Mazur entre polygone de Newton et de Hodge.

Théorème 2.1.1 ([RR96] theo. 4.2). *Supposons qu'il existe $\Lambda \in \mathcal{V}$ tel que*

$$\text{inv}(\Lambda, b\sigma\Lambda) = \mu \in X_*(T)^+.$$

On a alors $\bar{b} \in B(H, \mu)$.

L'hypothèse du théorème précédent est que le polygone de Hodge arithmétique associé à $(\Lambda, b\sigma\Lambda)$ coïncide avec le polygone de Hodge géométrique associé à μ . Sous cette hypothèse on a donc que :

- Le polygone de Newton associé à $\nu_{\bar{b}}$ est au dessus du polygone de Hodge associé à μ_2
- Le toseur « de périodes » dont la classes est donnée par $\kappa(\bar{b}) - \mu_1$ est trivial.

2.2. Donnée de type E.L. non ramifiée simple. Pour définir une variété de Shimura on a besoin d'une donnée de Shimura. De la même façon, la définition d'un espace de Rapoport-Zink nécessite au préalable que l'on se soit donné une donnée de Rapoport-Zink. Commençons par le cas des groupes linéaires.

Définition 2.2.1.

(1) Une donnée locale de Rapoport-Zink de type E.L. non ramifiée simple $(F, V, \bar{b}, \bar{\mu})$ consiste en la donnée

- d’une extension finie non ramifiée F de \mathbb{Q}_p de degré d ,
- d’un F -espace vectoriel V de dimension $n < +\infty$,
- d’une classe de σ -conjugaison $\bar{b} \in B(G)$ où $G = \text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \text{GL}_F(V)$,
- d’une classe de conjugaison de cocaractère minuscule $\mu : \mathbb{G}_{m/\overline{\mathbb{Q}}_p} \rightarrow G_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ au sens suivant : on peut choisir une base de V telle que

$$\begin{array}{ccc} \mu : \mathbb{G}_{m, \overline{\mathbb{Q}}_p} & \longrightarrow & G_{\overline{\mathbb{Q}}_p} \xrightarrow{\sim} \prod_{\tau \in \tilde{I}_F} \text{GL}_{n, \overline{\mathbb{Q}}_p} \\ z & \longmapsto & \prod_{\tau \in \tilde{I}_F} \text{diag}(\underbrace{z, \dots, z}_{q_\tau}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p_\tau}) \end{array}$$

où $\tilde{I}_F = \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(F, \overline{\mathbb{Q}}_p)$ et $(p_\tau, q_\tau)_{\tau \in \tilde{I}_F}$ est une collection d’entiers satisfaisant $p_\tau + q_\tau = n$.

On suppose de plus que ces données sont liées entre elles par la relation $\bar{b} \in B(G, \mu)$.

(2) Le corps réflex local associé E est le corps de définition de la classe de conjugaison de μ .

(3) On définit un foncteur J sur la catégorie des \mathbb{Q}_p -algèbres

$$J(R) = \{g \in G(R \otimes_{\mathbb{Q}_p} L), g(b\sigma) = (b\sigma)g\}.$$

Ce foncteur est représenté par un groupe réductif sur \mathbb{Q}_p (cf. [RZ96] prop. 1.12).

Soit G comme dans la définition 2.2.1 précédente. Alors, $B(G)$ classifie les isocristaux de dimension nd sur L munis d’une action de F . L’isocristal associé à $b \in G(L)$ est $(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} L, b \otimes \sigma)$. Le groupe J est une forme intérieure d’un sous-groupe de Levi de G , le centralisateur du morphisme des pentes $\nu_{\bar{b}}$.

Comme expliqué dans la section 2.1, puisque $H^1(\mathbb{Q}_p, G)$ est trivial, dans la définition 2.1.2 de l’ensemble $B(G, \mu)$, seule la condition (1) est nécessaire, la seconde étant automatique. La condition $\bar{b} \in B(G, \mu)$ se traduit donc uniquement en une inégalité de polygones et le fait qu’ils aient même points terminaux.

Dans la suite nous utilisons la donnée E.L. précédente pour définir des espaces de modules de groupes p -divisibles munis d’une action de \mathcal{O}_F . Si X est un tel groupe p -divisible sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et

$$\text{Lie } X = \bigoplus_{\tau \in \tilde{I}_F} (\text{Lie } X)_\tau$$

où \mathcal{O}_F agit sur $(\text{Lie } X)_\tau$ via $\tau : \mathcal{O}_F \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p$, on demandera que $\dim_{\overline{\mathbb{F}}_p} (\text{Lie } X)_\tau = p_\tau$. Si (M, F, V) désigne le cristal de Dieudonné covariant de X avec $(M[\frac{1}{p}], F) = (V_L, b\sigma)$ on a une décomposition $M = \bigoplus_{\tau} M_\tau$ et la condition sur l’algèbre de Lie se traduit en

$$\dim_{\overline{\mathbb{F}}_p} M_\tau / VM_{\sigma\tau} = p_\tau$$

soit encore pour tout τ ,

$$\dim_{\overline{\mathbb{F}}_p} M_\tau / FM_{\sigma^{-1}\tau} = q_{\sigma^{-1}\tau}.$$

Ainsi, le choix de μ pourrait paraître étrange à la vue du théorème 2.1.1 de Rapoport-Richartz puisque la position relative des réseaux M et $b\sigma M$ de V_L est donnée par le cocaractère

$$\begin{array}{ccc} \mu' : \mathbb{G}_{m, \overline{\mathbb{Q}}_p} & \longrightarrow & G_{\overline{\mathbb{Q}}_p} = \prod_{\tau \in \tilde{I}_F} \text{GL}_{n, \overline{\mathbb{Q}}_p} \\ z & \longmapsto & \prod_{\tau \in \tilde{I}_F} \text{diag}(\underbrace{z, \dots, z}_{q_{\sigma^{-1}\tau}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p_{\sigma^{-1}\tau}}) \end{array}$$

Néanmoins, avec les notations de la section 2.1, on a $\mu'_2 = \mu_2$ puisque la définition de ces caractères fait intervenir la moyenne de ceux-ci sur une orbite de Galois. Cela justifie le choix fait de μ .

Remarque 2.2.1.

- (1) Contrairement au corps F qui est un corps « abstrait », le corps réflex est un corps plongé, $E \subset \overline{\mathbb{Q}}_p$ par définition.
- (2) Il est aisé de vérifier que puisque $F|\mathbb{Q}_p$ est non-ramifiée, $E|\mathbb{Q}_p$ l’est également.

(3) Plus précisément, via l'action de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|\mathbb{Q}_p)$ sur $\mathbb{N}^{\tilde{I}_F}$, $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|E)$ est le stabilisateur de $(p_\tau)_{\tau \in \tilde{I}_F}$.

Dans ce texte nous utilisons la théorie de Dieudonné covariante. Le cocaractère $\tilde{\mu}$ qui suit s'avère alors plus adapté que μ à la vue des normalisations choisies concernant les filtrations de Hodge des cristaux de Dieudonné.

Définition 2.2.2. *Étant donné une donnée de type E.L. comme dans la définition 2.2.1 on note*

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} : \mathbb{G}_{m, \overline{\mathbb{Q}_p}} &\longrightarrow G_{\overline{\mathbb{Q}_p}} = \prod_{\tau \in \tilde{I}_F} \text{GL}_{n, \overline{\mathbb{Q}_p}} \\ z &\longmapsto \prod_{\tau \in \tilde{I}_F} \text{diag}(\underbrace{z^{-1}, \dots, z^{-1}}_{p_\tau}, \underbrace{1, \dots, 1}_{q_\tau}) \end{aligned}$$

à conjugaison près.

Si $\nu : \mathbb{G}_m \rightarrow G$ est le caractère central $z \mapsto z^{-1} \text{Id}$, on a $(\overline{p^{-1}b}, \tilde{\mu}) = (\overline{\nu(p)b}, \nu \cdot \mu)$ (à conjugaison près pour l'égalité de caractères). On a donc $\overline{p^{-1}b} \in B(G, \tilde{\mu})$.

2.3. Donnée de type P.E.L. non ramifiée simple unitaire et symplectique.

Définition 2.3.1.

(1) Une donnée locale de type P.E.L. non ramifiée simple $(F, *, V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \bar{b}, \bar{\mu})$ consiste en la donnée

- d'une extension non ramifiée F de \mathbb{Q}_p de dimension $d < +\infty$ munie d'une involution $*$,
- d'un F -espace vectoriel V de dimension $n < +\infty$,
- d'un produit hermitien symplectique $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{Q}_p$, c'est à dire tel que
 - $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est \mathbb{Q}_p -bilinéaire symplectique et nondégénérée,
 - $\langle rv_1, v_2 \rangle = \langle v_1, r^*v_2 \rangle$ pour $r \in F$, $v_1, v_2 \in V$
 tel qu'il existe un réseau autodual Λ_0 dans V pour ce produit symplectique (i.e. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induit un isomorphisme $\Lambda_0 \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\Lambda_0, \mathbb{Z}_p)$),
- d'une classe de σ -conjugaison $\bar{b} \in B(G)$ où G désigne le groupe des similitudes associé, i.e. pour une \mathbb{Q}_p -algèbre R ,

$$G(R) = \left\{ g \in \text{GL}_{F \otimes_{\mathbb{Q}_p} R}(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} R) \mid \exists c(g) \in R \forall v_1, v_2 \in V \otimes_{\mathbb{Q}_p} R \right. \\ \left. \langle gv_1, gv_2 \rangle_R = c(g) \langle v_1, v_2 \rangle_R \right\}.$$

L'homomorphisme $c : G \rightarrow \mathbb{G}_m$ est appelé le facteur de similitude. De plus, le choix d'un réseau autodual Λ_0 tel que précédemment définit un modèle entier réductif de G sur \mathbb{Z}_p .

- d'une classe de conjugaison de cocaractère minuscule $\mu : \mathbb{G}_{m, \overline{\mathbb{Q}_p}} \rightarrow G_{\overline{\mathbb{Q}_p}}$.

On suppose de plus que ces données sont liées entre elles par la relation $c \circ \mu(z) = z$ et $\bar{b} \in B(G, \mu)$.

(2) Le corps réflex local associé E est le corps de définition de la classe de conjugaison de μ .

(3) On définit un foncteur J sur la catégorie des \mathbb{Q}_p -algèbres

$$J(R) = \{g \in G(R \otimes_{\mathbb{Q}_p} L), g(b\sigma) = (b\sigma)g\}.$$

Ce foncteur est représenté par un groupe réductif sur \mathbb{Q}_p .

2.3.1. *Cas unitaire.* Si l'involution $*$ est non triviale sur F , cette donnée est dite *unitaire*. Dans ce cas, notons F_0 le sous-corps de F fixé par $*$. Alors $\text{Gal}(F|F_0) = \{\text{Id}, *\}$.

Soit $\Phi \subset \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(F, \overline{\mathbb{Q}_p})$ un type C.M. p -adique de F c'est-à-dire

$$\Phi \prod \Phi^* = \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(F, \overline{\mathbb{Q}_p})$$

où $\Phi^* = \{\tau \circ * \mid \tau \in \Phi\}$. En fixant une F -base de V , on a

$$G_{\overline{\mathbb{Q}_p}} \simeq \prod_{\tau \in \Phi} \text{GL}_{m, \overline{\mathbb{Q}_p}} \times \mathbb{G}_{m, \overline{\mathbb{Q}_p}}.$$

Le groupe G est alors une forme extérieure de $\prod_{\tau \in \tilde{F}} \mathrm{GL}_n \times \mathbb{G}_m$. On notera encore μ le composé

$$\mathbb{G}_{m, \overline{\mathbb{Q}}_p} \xrightarrow{\mu} G_{\overline{\mathbb{Q}}_p} \hookrightarrow \mathrm{GL}_{F \otimes \overline{\mathbb{Q}}_p}(V \otimes \overline{\mathbb{Q}}_p) \times \mathbb{G}_{m, \overline{\mathbb{Q}}_p} \simeq \prod_{\tau \in \tilde{F}} \mathrm{GL}_{n/\overline{\mathbb{Q}}_p} \times \mathbb{G}_{m, \overline{\mathbb{Q}}_p}$$

où $\tilde{F} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(F, \overline{\mathbb{Q}}_p)$. On peut supposer que

$$\mu(z) = \prod_{\tau \in \tilde{F}} \mathrm{diag}(\underbrace{z, \dots, z}_{q_\tau}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p_\tau}) \times (z)$$

avec $(p_{\tau^*}, q_{\tau^*}) = (q_\tau, p_\tau)$.

Contrairement au cas EL, $H^1(\mathbb{Q}_p, G)$ est trivial si n est impair mais $H^1(\mathbb{Q}_p, G) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si n est pair. Plus précisément, il y a toujours deux classes de formes hermitiennes sur V distinguées suivant que leur discriminant, un élément de F_0^\times , est ou non une norme d'un élément de F . Cependant, si n est impair ces deux classes de formes hermitiennes sont dans la même classe de similitude, ce qui n'est pas le cas si n est pair. Lorsque n est pair la deuxième condition de la définition 2.1.2 intervient donc dans la définition de l'ensemble $B(G, \mu)$.

La même remarque qu'après la définition 2.2.1 s'applique concernant le choix de μ et le théorème de Rapoport-Richartz. Plus précisément, si μ' est défini en remplaçant la collection $(p_\tau, q_\tau)_\tau$ par $(p_{\sigma^{-1}\tau}, q_{\sigma^{-1}\tau})_\tau$ alors $B(G, \mu) = B(G, \mu')$. En effet, il est clair que la moyenne sur une orbite de Galois de μ coïncide avec celle de μ' . De plus, les composés de μ et μ' avec la projection sur le cocentre, bien que non égales, ont même classe dans les coinvariants sous le groupe de Galois.

On pose comme dans la définition 2.2.2

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} : \mathbb{G}_{m, \overline{\mathbb{Q}}_p} &\longrightarrow G_{\overline{\mathbb{Q}}_p} \\ z &\longmapsto \prod_{\tau \in \tilde{F}} \mathrm{diag}(\underbrace{z^{-1}, \dots, z^{-1}}_{p_\tau}, \underbrace{1, \dots, 1}_{q_\tau}) \times (z^{-1}). \end{aligned}$$

On a alors $\overline{p^{-1}b} \in B(G, \tilde{\mu})$.

Concernant le corps reflex E , la remarque 2.2.1 s'applique de façon identique et $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p|E)$ est le stabilisateur de la collection $(p_\tau, q_\tau)_{\tau \in \tilde{F}}$.

2.3.2. *Cas symplectique.* Si l'involution $*$ est triviale sur F , cette donnée est dite *symplectique*. Dans ce cas, la dimension n du F -espace vectoriel V est forcément paire. En fixant une F -base de V , on a

$$G_{\overline{\mathbb{Q}}_p} = G\left(\prod_{\tau \in \tilde{F}} \mathrm{GSp}_n\right)$$

où le G devant le produit signifie que l'on prend le sous groupe du produit formé des uplets ayant même facteur de similitude.

On peut supposer que

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{G}_{m/\overline{\mathbb{Q}}_p} &\longrightarrow G_{\overline{\mathbb{Q}}_p} \xrightarrow{\sim} G\left(\prod_{\tau \in \tilde{F}} \mathrm{GSp}_n\right) \\ z &\longmapsto \prod_{\tau \in \tilde{F}} \begin{pmatrix} zI_{n/2} & \\ & I_{n/2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dans ce cas, on a $p_\tau = q_\tau = n/2$ et on pose $\tilde{\mu}(z) = z^{-1}\mu(z)$. Puisque $H^1(\mathbb{Q}_p, G)$ est trivial, dans la définition 2.1.2 seule la première condition intervient.

Dans ce cas là le corps reflex est $E = \mathbb{Q}_p$.

2.4. Espaces de Rapoport-Zink associés.

Définition 2.4.1. Soit $(F, V, \bar{b}, \bar{\mu})$ une donnée locale de type E.L. non ramifiée simple. Soit \mathbb{X} un groupe p -divisible sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ muni d'une action de \mathcal{O}_F et d'isocrystal covariant muni de son action de F égal à $(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} L, b\sigma)$. Nous noterons $\check{\mathcal{M}}(b, \mu) / \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\check{E}})$ l'espace de Rapoport-Zink associé, où $\check{E} = \widehat{E^{\mathrm{nr}}}$ est le complété p -adique de l'extension maximale non ramifiée de E dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$. C'est un espace de modules de groupes p -divisibles munis d'une action de \mathcal{O}_F . Pour un $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\check{E}})$ -schéma S sur lequel p est localement nilpotent, un S -point de $\check{\mathcal{M}}(b, \mu)$ est une classe d'isomorphisme de couples (X, ρ) , où

- X est un groupe p -divisible défini sur S muni d'une action de \mathcal{O}_F vérifiant la condition suivante : si

$$\mathrm{Lie}(X) = \bigoplus_{\tau \in \check{I}_F} \mathrm{Lie}(X)_\tau$$

est la décomposition de $\mathrm{Lie}(X)$ suivant l'action de \mathcal{O}_F , alors pour tout $\tau \in \check{I}_F$, $\mathrm{Lie}(X)_\tau$ est localement libre de rang p_τ .

- $\rho : \mathbb{X} \times_{\overline{\mathbb{F}}_p} (S \bmod p) \rightarrow X \times_S (S \bmod p)$ est une quasi-isogénie compatible à l'action de \mathcal{O}_F .

On passe maintenant à la définition de l'espace de Rapoport-Zink associé à une donnée de type P.E.L.

Définition 2.4.2. Soit X un groupe p -divisible. On appelle polarisation principale de X un isomorphisme $\lambda : X \xrightarrow{\sim} X^\vee$ avec son dual de Cartier X^\vee tel que $\lambda^\vee = -\lambda$.

Définition 2.4.3. Soit $(F, *, V, < \cdot, \cdot >, \bar{b}, \bar{\mu})$ une donnée de type P.E.L. non ramifiée simple. Soit \mathbb{X} un groupe p -divisible sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ muni d'une action de \mathcal{O}_F , d'une polarisation principale λ tel que l'isocrystal covariant polarisé muni de son action de F égal à $(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} L, b\sigma, < \cdot, \cdot >)$. Nous noterons $\check{\mathcal{M}}(b, \mu) / \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\check{E}})$ l'espace de Rapoport-Zink associé avec $\check{E} = \widehat{E^{\mathrm{nr}}}$. C'est un espace de modules de groupes p -divisibles principalement polarisés munis d'une action de \mathcal{O}_F . Pour un $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\check{E}})$ -schéma S sur lequel p est localement nilpotent, un S -point de $\check{\mathcal{M}}(b, \mu)$ est une classe d'équivalence de triplets (X, λ', ρ) , où

- (X, λ') est un groupe p -divisible principalement polarisé sur S muni d'une action de \mathcal{O}_F tel que via cette action $\iota : \mathcal{O}_F \rightarrow \mathrm{End}(X)$, l'involution $*$ sur \mathcal{O}_F est compatible à l'involution de Rosati sur $\mathrm{End}(X)$ c'est à dire $\lambda' : (X, \iota) \rightarrow (X^\vee, \iota \circ *)$. On suppose de plus que X vérifie la condition suivante : si

$$\mathrm{Lie}(X) = \bigoplus_{\tau \in \check{I}_F} \mathrm{Lie}(X)_\tau$$

est la décomposition de $\mathrm{Lie}(X)$ suivant l'action de \mathcal{O}_F , alors pour tout $\tau \in \check{I}_F$, $\mathrm{Lie}(X)_\tau$ est localement libre de rang p_τ .

- $\rho : \mathbb{X} \times_{\overline{\mathbb{F}}_p} \bar{S} \rightarrow X \times_S \bar{S}$ est une quasi-isogénie compatible à l'action de \mathcal{O}_F , où \bar{S} est le sous-schéma de S défini par l'idéal (p) . On suppose de plus que le diagramme suivant est commutatif à une fonctions localement constante $S \rightarrow \mathbb{Q}_p^\times$ près :

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{X}_{\bar{S}} & \xrightarrow{\rho} & X_{\bar{S}} \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \lambda' \\ \mathbb{X}_{\bar{S}}^\vee & \xleftarrow{\rho^\vee} & X_{\bar{S}}^\vee \end{array}$$

- Deux triplets $(X_1, \lambda'_1, \rho_1)$ et $(X_2, \lambda'_2, \rho_2)$ sont équivalents s'il existe un isomorphisme entre (X_1, ρ_1) et (X_2, ρ_2) via lequel λ'_1 et λ'_2 diffèrent d'une unité dans \mathbb{Z}_p^\times , c'est à dire une fonction localement constante $S \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$.

Le schéma formel $\check{\mathcal{M}}(b, \mu)$ est localement formellement de type fini ([RZ96] théo. 3.25) et formellement lisse sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\check{E}})$ d'après la théorie de la déformation de Grothendieck-Messing ([Mes72]). Il est muni d'une action à gauche de $J(\mathbb{Q}_p)$ via

$$g \cdot (X, \rho) = (X, \rho \circ g^{-1}), \text{ où } g \in J(\mathbb{Q}_p) \text{ et } (X, \rho) \in \check{\mathcal{M}}(b, \mu).$$

S'il n'y a pas de confusion possible, on écrit $\check{\mathcal{M}}$ pour $\check{\mathcal{M}}(b, \mu)$.

Rappelons qu'en utilisant la hauteur de la quasi-isogénie ρ , $\check{\mathcal{M}}$ peut être scindé en unions disjointes des sous-schémas formels ouverts et fermés

$$\check{\mathcal{M}} = \coprod_{i \in \text{Im } \varkappa} \check{\mathcal{M}}(i)$$

par une application localement constante

$$\varkappa : \check{\mathcal{M}} \rightarrow \Delta,$$

où $\Delta = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_{\mathbb{Q}_p}^*(G), \mathbb{Z})$ et $X_{\mathbb{Q}_p}^*(G)$ est le groupe des caractères \mathbb{Q}_p -rationnels de G . Cette application vérifie

$$\varkappa(g \cdot x) = \omega_J(g) + \varkappa(x), \quad g \in J(\mathbb{Q}_p), x \in \check{\mathcal{M}}$$

avec $\omega_J : J(\mathbb{Q}_p) \rightarrow \Delta$ est défini par l'équation $\langle \omega_J(x), \chi \rangle = v_p(i(\chi)(x))$, où $i : X_{\mathbb{Q}_p}^*(G) \rightarrow X_{\mathbb{Q}_p}^*(J)$ est l'application naturelle entre les deux groupes de caractères \mathbb{Q}_p -rationnels (cf. [RZ96], 3.52).

Remarque 2.4.1. *Puisque $\overline{\mathbb{F}}_p$ est la clôture algébrique de \mathbb{F}_p associée à $\overline{\mathbb{Q}}_p | \mathbb{Q}_p$, $E | \mathbb{Q}_p$ est non-ramifiée et $L = W(\overline{\mathbb{F}}_p)_{\mathbb{Q}}$, on a $L = \check{E}$.*

2.4.1. *Donnée de descente de Rapoport-Zink.* Soit $\sigma_E : \check{E} \xrightarrow{\sim} \check{E}$ l'automorphisme de Frobenius relatif à E . Pour un Spf $\mathcal{O}_{\check{E}}$ -schéma S avec le morphisme structural $f : S \rightarrow \text{Spf } \mathcal{O}_{\check{E}}$, on note $S_{[\sigma_E]}$ le Spf $\mathcal{O}_{\check{E}}$ -schéma S avec le morphisme structural

$$\sigma_E \circ f : S \xrightarrow{f} \text{Spf } \mathcal{O}_{\check{E}} \xrightarrow{\sigma_E} \text{Spf } \mathcal{O}_{\check{E}}.$$

Une donnée de descente de Rapoport-Zink pour un espace de Rapoport-Zink $\check{\mathcal{M}}$ est un isomorphisme de foncteurs :

$$\alpha : \check{\mathcal{M}} \rightarrow \sigma_E^* \check{\mathcal{M}}$$

défini comme suit :

Soit S un Spf $\mathcal{O}_{\check{E}}$ -schéma sur lequel p est localement nilpotent avec morphisme structural $f : S \rightarrow \text{Spf } \mathcal{O}_{\check{E}}$. Soit $(X, \lambda', \rho) \in \check{\mathcal{M}}(S)$ pour le type P.E.L (resp. $(X, \rho) \in \check{\mathcal{M}}(S)$ pour le type E.L). On définit un point $(X^\alpha, \lambda'^\alpha, \rho^\alpha)$ (resp. (X^α, ρ^α)) dans $\check{\mathcal{M}}(S_{[\sigma_E]})$. Posons $X^\alpha := X$ et

$$\begin{aligned} \rho^\alpha &= \rho \circ \overline{f}^* (\text{Frob}_E)^{-1} : \overline{\sigma_E f^* \mathbb{X}} \xrightarrow{\overline{f}^* (\text{Frob}_E^{-1})} \overline{f^* \mathbb{X}} \xrightarrow{\rho} X_{\overline{S}} \\ \lambda'^\alpha &: X \xrightarrow{\lambda'} X^\vee \xrightarrow{\sim} (X^\alpha)^\vee \end{aligned}$$

où $\overline{(-)}$ désigne $(-) \pmod{p}$ et $X^\vee \xrightarrow{\sim} (X^\alpha)^\vee$ est induit par l'isomorphisme naturel $\mathbb{G}_m \xrightarrow{\sim} \sigma_E^* \mathbb{G}_m$. Alors

$$\begin{aligned} \alpha(S) : \check{\mathcal{M}}(S) &\rightarrow \check{\mathcal{M}}(S_{[\sigma_E]}) = \sigma_E^* \check{\mathcal{M}}(S) \\ (X, \lambda', \rho) &\mapsto (X^\alpha, \lambda'^\alpha, \rho^\alpha) \quad (\text{resp. } (X, \rho) \mapsto (X^\alpha, \rho^\alpha)). \end{aligned}$$

2.5. Non vacuité des espaces de Rapoport-Zink. Le fait que les espaces des Rapoport-Zink précédents sont non vides résulte des travaux de Kottwitz-Rapoport ([KR03]) et Fontaine-Rapoport ([FR05]). Cependant cela n'est pas écrit explicitement dans les articles précédents, c'est pourquoi nous le faisons. Cela nous permet également de clarifier nos conventions concernant les φ -modules filtrés admissibles associés aux groupes p -divisibles.

2.5.1. *L'application de périodes.* Soit $\check{\mathcal{F}}$ la Grassmannienne des sous-groupes paraboliques de type $\tilde{\mu}$ dans $G_{\check{E}}$. Soit $K | \check{E}$ une extension de degré fini. Soit $(X, \rho) \in \check{\mathcal{M}}^{rig}(K) = \check{\mathcal{M}}(\mathcal{O}_K)$ dans le cas EL, resp. (X, λ, ρ) dans le cas PEL. Soit $\mathbb{D}(X)$ le module de Dieudonné covariant de X . Notons φ le Frobenius de $\mathbb{D}(X)$. La quasi-isogénie ρ induit un isomorphisme

$$\rho_* : (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} L, b\sigma) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{D}(X)[\frac{1}{p}], \varphi).$$

Soit $\text{Fil}^\bullet \mathbb{D}(X)_K$ la filtration de Hodge de $\mathbb{D}(X) \otimes_{\mathcal{O}_L} K$ normalisée comme dans le chapitre 1. On a donc $\text{Fil}^{-1} \mathbb{D}(X)_K = \mathbb{D}(X)_K$, $\text{Fil}^1 \mathbb{D}(X)_K = 0$ et

$$\text{Fil}^{-1} \mathbb{D}(X)_K / \text{Fil}^0 \mathbb{D}(X)_K = \text{Lie } X[\frac{1}{p}].$$

Soit $\text{Fil}^\bullet V_K$ la filtration déduite de $V \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$. Elle est stable sous l'action de F , totalement isotrope sous le produit symplectique dans le cas PEL et vérifie de plus

$$\text{Fil}^{-1} V_K = V_K, \quad \text{Fil}^1 V_K = 0 \quad \text{et} \quad \dim_K(V_K / \text{Fil}^0 V_K)_\tau = p_\tau.$$

Elle définit donc un élément de $\check{\mathcal{F}}(K)$. Cela définit donc une application de périodes

$$\check{\pi} : \check{\mathcal{M}}(\mathcal{O}_K) \longrightarrow \check{\mathcal{F}}(K).$$

D'après un théorème de comparaison ([Che], théo 4.1 et coro 4.3), après avoir fixé une clôture algébrique de K ,

$$V_p(X) = \text{Fil}^0(\mathbb{D}(X)_K \otimes B_{\text{cris}})^{\varphi=p}.$$

On en déduit que le φ -module filtré

$$(V_L, p^{-1}b\sigma, \text{Fil}^\bullet V_K)$$

est admissible au sens de Fontaine. En d'autres termes, après avoir fixé un scindage de la filtration de Hodge, si $\mu_0 : \mathbb{G}_{m\overline{\mathbb{Q}_p}} \rightarrow G_{\overline{\mathbb{Q}_p}}$ est le cocaractère conjugué à $\tilde{\mu}$ définissant la filtration scindée précédente alors la paire $(p^{-1}b\sigma, \mu_0)$ est admissible au sens de la définition 1.18 de [RZ96]. Donc,

$$\check{\pi} : \check{\mathcal{M}}(\mathcal{O}_K) \longrightarrow \check{\mathcal{F}}^a(K).$$

2.5.2. Non vacuité.

Proposition 2.5.1. *Les espaces de Rapoport-Zink précédents sont non vides.*

Démonstration. Puisque $\overline{p^{-1}b} \in B(G, \tilde{\mu})$, d'après la première condition de la définition 2.1.2, c'est à dire $\nu_{\overline{p^{-1}b}} \leq \tilde{\mu}_2$, la condition du théorème 3 de [FR05] est vérifiée. Il existe donc une extension de degré fini $K|\check{E}$ telle que $\check{\mathcal{F}}^a(K) \neq \emptyset$. Choisissons un tel point admissible dans $\check{\mathcal{F}}(K)$. D'après les travaux de Fontaine, Fontaine-Laffaille et Breuil, pour un tel point admissible il existe un groupe p -divisible X sur \mathcal{O}_K et une quasi-isogénie $\rho : \mathbb{X} \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K \rightarrow X \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$ telle que le tiré en arrière par $\rho_* : V_K \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(X)_K$ de la filtration de Hodge de X soit le point de $\check{\mathcal{F}}(K)$ choisi.

Supposons d'abord que l'on est dans le cas EL. Rappelons que le foncteur de Fontaine de la catégorie des groupes p -divisibles à isogénie près sur \mathcal{O}_K vers les φ -modules filtrés relativement à $K|\check{E}$ est pleinement fidèle. Puisque la filtration associée à notre point admissible dans $\check{\mathcal{F}}(K)$ est stable sous l'action de F , le groupe p -divisible X est donc muni d'un morphisme $\iota : \mathcal{O}_F \rightarrow \text{End}(X)_{\mathbb{Q}}$ tel que la quasi-isogénie ρ soit compatible à cette action de \mathcal{O}_F . Soit \overline{K} une clôture algébrique de K . La représentation Galoisienne $\text{Gal}(\overline{K}|K) \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{Q}_p}(V_p(X))$ est à valeurs dans $\text{GL}_F(V_p(X))$. Il existe donc un \mathcal{O}_F -réseau $\Lambda \subset V_p(X)$ stable sous l'action de $\text{Gal}(\overline{K}|K)$. Il existe alors un groupe p -divisible X' sur \mathcal{O}_K muni d'une action de \mathcal{O}_F , une quasi-isogénie $f : X \rightarrow X'$ commutant aux actions de \mathcal{O}_F et telle que $V_p(f)(\Lambda) = T_p(X')$ où $V_p(f) : V_p(X) \xrightarrow{\sim} V_p(X')$. On a alors

$$(X', f \circ \rho) \in \check{\mathcal{M}}(\mathcal{O}_K).$$

En effet, la condition de Kottwitz donnant l'action de \mathcal{O}_F sur $\text{Lie } X'$, $\dim \text{Lie}(X')_\tau = p_\tau$, est satisfaite puisqu'on peut la lire sur le gradué de la filtration du φ -module filtré associé au point dont on est parti dans $\check{\mathcal{F}}^{\text{ad}}(K)$.

Supposons maintenant qu'on est dans le cas PEL. Le foncteur pleinement fidèle de Fontaine qui à un groupe p -divisible à isogénie près sur \mathcal{O}_K associe son φ -module filtré est compatible à la dualité de Cartier. Le groupe p -divisible est donc muni comme précédemment de $\iota : \mathcal{O}_F \rightarrow \text{End}(X)_{\mathbb{Q}}$ mais également d'une quasi-isogénie $\lambda : (X, \iota) \rightarrow (X^\vee, \iota \circ *)$ compatible à celle sur \mathbb{X} via ρ . Soit $(V_p(X), \iota, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ l'espace hermitien symplectique associé où $\langle \cdot, \cdot \rangle : V_p(X) \times V_p(X) \rightarrow \mathbb{Q}_p$ après avoir fixé un isomorphisme $\mathbb{Z}_p \simeq \mathbb{Z}_p(1)$. On utilise maintenant la condition (2) dans la définition 2.1.2. Puisque $\kappa(\overline{p^{-1}b}) = \tilde{\mu}_1$, d'après la proposition 1.20 de [RZ96], le torseur des périodes

$$\text{Isom}_F((V, \langle \cdot, \cdot \rangle), (V_p(X), \langle \cdot, \cdot \rangle))$$

des isomorphismes de F -espaces hermitiens est trivial. Il existe donc un \mathcal{O}_F -réseau Λ dans $V_p(X)$ autodual sous $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Quitte à remplacer K par une extension de degré fini on peut supposer que la représentation Galoisienne $\text{Gal}(\overline{K}|K) \rightarrow \text{GL}_F(V_p(X))$ stabilise le réseau Λ . Il existe alors un groupe p -divisible X' muni d'une action de \mathcal{O}_F sur \mathcal{O}_K et une quasi-isogénie $f : X \rightarrow X'$ telle que $V_p(f)(\Lambda) = T_p(X')$. Un tel X' est alors muni d'une unique polarisation $\lambda' : X' \xrightarrow{\sim} X'^\vee$ compatible via f à la quasi-isogénie λ . On a alors

$$(X', \lambda', f \circ \rho) \in \check{\mathcal{M}}(\mathcal{O}_K).$$

□

Remarque 2.5.1. *Puisque $\check{\mathcal{M}}$ est non vide, on peut toujours supposer que \mathbb{X} muni de ses structures additionnelles définit un point de $\check{\mathcal{M}}(\overline{\mathbb{F}}_p)$. On supposera désormais que c'est le cas dans la suite. Cela implique en particulier que $0 \in \text{Im } \varkappa$.*

2.6. La tour d'espaces rigides.

Définition 2.6.1. *On désigne par $\check{\mathcal{M}}^{\text{rig}}$ la fibre générique de Berthelot de $\check{\mathcal{M}}$ sur \check{E} au sens des espaces rigides ([dJ95a] section 7).*

Nous adopterons la définition suivante dans la suite.

Définition 2.6.2. *Un \mathcal{O}_F -système local étale sur un espace rigide Y est un système projectif $(\mathcal{F}_m)_{m \geq 1}$ de faisceaux étales de \mathcal{O}_F -modules tel que :*

- \mathcal{F}_m est un faisceau étale de $\mathcal{O}_F/p^m \mathcal{O}_F$ -modules, localement libre de rang fini,
- \mathcal{F}_m devient constant au dessus d'un revêtement étale fini de Y ,
- pour $m' \geq m$, $\mathcal{F}_{m'} \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathcal{O}_F/p^m \mathcal{O}_F \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_m$.

Au groupe p -divisible universel $X^{\text{univ}}/\check{\mathcal{M}}$ est associé un groupe p -divisible rigide

$$(X^{\text{univ}})^{\text{rig}} = \varinjlim_m X^{\text{univ}}[m]^{\text{rig}}$$

où $X^{\text{univ}}[m]^{\text{rig}}/\check{\mathcal{M}}^{\text{rig}}$ est étale fini de degré $p^{mht\mathbb{X}}$. Le système compatible

$$T_p(X^{\text{univ}}) := (X^{\text{univ}}[m]^{\text{rig}})_{m \in \mathbb{N}}$$

est un \mathcal{O}_F -système local étale et (dans le cas P.E.L) est muni d'une polarisation

$$T_p(X^{\text{univ}}) \times T_p(X^{\text{univ}}) \rightarrow \mathbb{Z}_p(1)$$

où $\mathbb{Z}_p(1)$ est le \mathbb{Z}_p -système local étale rigide $(\mu_{p^n})_{n \in \mathbb{N}}$. On remarquera que cette polarisation n'est définie qu'à multiplication par une unité dans \mathbb{Z}_p^\times -près (cf. néanmoins 5.1 où on explique comment fixer un élément particulier dans cette classe d'homothétie).

Notons $\overline{\check{E}}$ la clôture algébrique de \check{E} associée au plongement canonique $E \subset \overline{\mathbb{Q}}_p$. Fixons un \mathcal{O}_F -réseau Λ_0 dans V dans le cas de type E.L. Dans le cas de type P.E.L, on fixe un \mathcal{O}_F -réseau Λ_0 autodual dans V . D'après la trivialité du tore des périodes qui résulte de la condition (2) dans la définition 2.1.2 et de la proposition 1.20 de [RZ96] (cf. par exemple [Far04], 2.3.9.1), pour tout $x \in \check{\mathcal{M}}^{\text{rig}}(\overline{\check{E}})$, après avoir fixé un isomorphisme $\mathbb{Z}_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p(1)$ sur $\overline{\check{E}}$ c'est à dire un système compatible de racines primitives dans $\mu_{p^n}(\overline{\check{E}})$ lorsque n varie, il existe un isomorphisme de \mathcal{O}_F -modules symplectiques

$$\Lambda_0 \xrightarrow{\sim} T_p(X_x^{\text{univ}}).$$

Le réseau Λ_0 définit un modèle entier réductif de G . On a alors

$$G(\mathbb{Z}_p) = \text{Aut}_{\mathcal{O}_F}(\Lambda_0)$$

dans le cas E.L. et

$$G(\mathbb{Z}_p) = \text{Aut}_{\mathcal{O}_F}(\Lambda_0) \cap G(\mathbb{Q}_p) = \text{Gsp}(\Lambda_0, \langle \cdot, \cdot \rangle)$$

dans le cas P.E.L..

Si $K \subset G(\mathbb{Z}_p)$ est un sous-groupe ouvert, on peut parler de structure de niveau K sur $T_p(X^{\text{univ}})$ au sens usuel que nous rappelons.

Définition 2.6.3. Soit $Y \rightarrow \check{\mathcal{M}}^{\text{rig}}$ un espace rigide. Fixons un $x \in Y(\overline{E})$ dans chaque composante connexe de Y . Une structure de niveau K sur $T_p(X_x^{\text{univ}})$ au-dessus de Y est la donnée pour tout x comme précédemment d'une K -orbite d'isomorphismes de \mathcal{O}_F -modules :

$$\eta : \Lambda_0 \xrightarrow{\sim} T_p(X_x^{\text{univ}})$$

vérifiant :

- dans le cas P.E.L., après avoir fixé un isomorphisme entre la fibre de $\mathbb{Z}_p(1)$ au point x et \mathbb{Z}_p , on demande que η soit compatible aux produits symplectiques à une unité dans \mathbb{Z}_p^\times -près,
- via η l'action de monodromie de $\pi_1(Y, x)$ sur $T_p(X_x^{\text{univ}})$ se fait à travers K agissant sur Λ_0 .

Pour un tel η on note $\bar{\eta}$ sa classe modulo composition par un élément de K .

Définition 2.6.4. Pour $K \subset \text{Aut}(\Lambda_0)$ un sous-groupe compact ouvert, nous notons $\check{\mathcal{M}}_K$ l'espace rigide qui classifie les structures de niveau K sur $T_p(X^{\text{univ}})$. Autrement dit,

$$\check{\mathcal{M}}_K = \underline{\text{Isom}}(\Lambda_0/p^m\Lambda_0, X^{\text{univ}}[p^m]^{\text{rig}})/K, \quad m \gg 0$$

où

- $\Lambda_0/p^m\Lambda_0$ est vu comme faisceau étale constant.
- Isom signifie les isomorphismes de faisceaux étales compatibles à l'action de \mathcal{O}_F dans le cas E.L.. Dans le cas P.E.L. on demande de plus que localement pour la topologie étale, après avoir fixé un isomorphisme $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mu_p^{\text{rig}}$, ils soient compatibles aux produits symplectiques

$$X^{\text{univ}}[p^m]^{\text{rig}} \times X^{\text{univ}}[p^m]^{\text{rig}} \longrightarrow \mu_p^{\text{rig}}$$

induit par la polarisation et

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \Lambda_0/p^m\Lambda_0 \times \Lambda_0/p^m\Lambda_0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$$

à une unité dans \mathbb{Z}_p^\times -près, c'est à dire une fonction localement constante à valeurs dans \mathbb{Z}_p^\times -près.

- L'hypothèse $m \gg 0$ signifie $(\text{Id} + p^m \text{End}(\Lambda_0)) \cap G(\mathbb{Q}_p) \subset K$.

La collection $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$ est une tour de revêtements finis étales au-dessus de $\check{\mathcal{M}}^{\text{rig}}$. Rappelons que l'on a une action à droite de $G(\mathbb{Q}_p)$ sur $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$ comme suit : pour $K \subset \text{Aut}(\Lambda_0)$ et $g \in G(\mathbb{Q}_p)$ tels que $g^{-1}Kg \subset \text{Aut}(\Lambda_0)$, on a un isomorphisme

$$g : \check{\mathcal{M}}_K \xrightarrow{\sim} \check{\mathcal{M}}_{g^{-1}Kg}$$

(cf. [RZ96] 5.34 ou [Far04] 2.3.9.3). L'action de $J(\mathbb{Q}_p)$ sur $\check{\mathcal{M}}^{\text{rig}}$ s'étend à $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$ et commute à celle de $G(\mathbb{Q}_p)$.

La donnée de descente de Rapoport-Zink pour $\check{\mathcal{M}}$ induite naturellement la donnée de descente de Rapoport-Zink pour la tour $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$, car pour un $\check{\mathcal{M}}^{\text{rig}}$ -espace rigide Y , une structure de niveau K ne dépend pas du morphisme structural $Y \rightarrow \text{Sp } \check{E}$.

Remarque 2.6.1. Les définitions 2.6.3 et 2.6.4 d'une structure de niveau P.E.L. et de son espace classifiant que nous avons données sont celles apparaissant dans la littérature. Dans la section 5.1 nous donnerons une reformulation plus agréable de ces définitions.

Remarque 2.6.2. Soit Z_G le centre de G . Puisque J est une forme intérieure d'un sous-groupe de Levi G , il existe un plongement canonique $Z_G \hookrightarrow J$. Alors, via le plongement

$$\begin{aligned} Z_G(\mathbb{Q}_p) &\hookrightarrow J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p), \\ z &\mapsto (z^{-1}, z) \end{aligned}$$

$Z_G(\mathbb{Q}_p)$ agit trivialement sur la tour $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$. En effet, l'action d'un tel élément sur le module de Tate ou le module de Dieudonné est identique. Ainsi, la tour $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$ est munie d'une action de $(J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p))/Z_G(\mathbb{Q}_p)$.

2.7. Le système local équivariant sur la tour. Notons pour tout $K \subset \text{Aut}(\Lambda_0)$, \mathcal{T}_K le tiré en arrière via $\check{\mathcal{M}}_K \rightarrow \check{\mathcal{M}}^{rig}$ du \mathcal{O}_F -système local étale $T_p(X^{\text{univ}})$. On a donc $\mathcal{T}_{G(\mathbb{Z}_p)} = T_p(X^{\text{univ}})$. La collection de faisceaux $(\mathcal{T}_K)_{K \subset G(\mathbb{Z}_p)}$ forme un système $J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant sur la tour $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$ au sens suivant. Si $g \in J(\mathbb{Q}_p)$, via l'isomorphisme

$$g : \check{\mathcal{M}}_K \xrightarrow{\sim} \check{\mathcal{M}}_K$$

on a un isomorphisme canonique compatible aux structures additionnelles

$$g^* \mathcal{T}_K \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}_K.$$

C'est une conséquence de ce que l'action de $g \in J(\mathbb{Q}_p)$ sur (X, ρ) modifie la déformation ρ du groupe p -divisible et non le groupe p -divisible X lui-même et donc pas son module de Tate. Si $g \in G(\mathbb{Q}_p)$ et $K \subset \text{Aut}(\Lambda_0)$ vérifient $g^{-1}Kg \subset \text{Aut}(\Lambda_0)$ et $\Lambda_0 \subset g.\Lambda_0$, associé au morphisme

$$g : \check{\mathcal{M}}_K \xrightarrow{\sim} \check{\mathcal{M}}_{g^{-1}Kg}$$

il existe un morphisme

$$\mathcal{T}_K \longrightarrow g^* \mathcal{T}_{g^{-1}Kg}.$$

En gros (on renvoie à [RZ96] chap. 5 ou [Far04], 2.3.9.3), le morphisme $g : \check{\mathcal{M}}_K \xrightarrow{\sim} \check{\mathcal{M}}_{g^{-1}Kg}$ fait correspondre à $(X, \rho, \bar{\eta})$ un triplet

$$(X/C, f \circ \rho, \bar{\eta} \circ g)$$

où $C \subset X$ est un sous-groupe plat fini et $f : X \rightarrow X/C$. Le morphisme précédent $\mathcal{T}_K \longrightarrow g^* \mathcal{T}_{g^{-1}Kg}$ est alors donné par $T_p(X) \hookrightarrow T_p(X/C)$.

Ces morphismes se composent naturellement et les deux « actions » de $J(\mathbb{Q}_p)$ et $G(\mathbb{Q}_p)$ commutent.

Remarque 2.7.1. *Bien que via le plongement $Z_G(\mathbb{Q}_p) \hookrightarrow J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p)$, $Z_G(\mathbb{Q}_p)$ agisse trivialement sur $\check{\mathcal{M}}_K$, le système compatible de \mathcal{O}_F -systèmes locaux étales $(\mathcal{T}_K)_K$ n'est pas $(J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p))/Z_G(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant i.e. $Z_G(\mathbb{Q}_p)$ n'agit pas trivialement sur \mathcal{T}_K . Par exemple, l'action de $(p, p^{-1}) \in J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p)$ est donnée par $\mathcal{T}_K \xrightarrow{\times p} \mathcal{T}_K$.*

3. ESPACES DE RAPOPORT-ZINK ASSOCIÉS AUX TORES

3.1. Donnée de Rapoport-Zink torique et norme reflex. Comme précédemment on suppose fixé une clôture algébrique \mathbb{Q}_p de \mathbb{Q} . On oublie momentanément les notations qui précèdent dans cette section. Soit T un tore sur \mathbb{Q}_p et $\mu \in X_*(T) = \text{Hom}(\mathbb{G}_m, T_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$ un cocaractère. Notons E le corps de définition de μ et \check{E} le complété de l'extension maximale non-ramifiée de E dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$. Posons

$$J = G = T.$$

Remarque 3.1.1. *Contrairement aux données de Rapoport-Zink « usuelles », la donnée permettant de définir l'espace associé à un tore ne requiert pas le choix d'un élément $\bar{b} \in B(T)$. La raison est que $\mu \in X_*(T)$ étant donné, il existe un unique $\bar{b} \in B(T)$ tel que $\bar{b} \in B(T, \mu)$. En effet, d'après Kottwitz, si $\Gamma = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|\mathbb{Q}_p)$, on a $B(T) = X_*(T)_\Gamma$ et $B(T, \mu)$ est l'ensemble des éléments de $X_*(T)_\Gamma$ qui coïncident avec l'image de μ dans les coinvariants sous Γ .*

Le cocaractère $\mu : \mathbb{G}_{m,E} \rightarrow T_E$ définit un morphisme de tores

$$N_\mu : \text{Res}_{E/\mathbb{Q}_p} \mathbb{G}_m \longrightarrow T$$

qui est le composé

$$\text{Res}_{E/\mathbb{Q}_p} \mathbb{G}_m \xrightarrow{\text{Res}_{E/\mathbb{Q}_p} \mu} \text{Res}_{E/\mathbb{Q}_p} T_E \xrightarrow{N_{E/\mathbb{Q}_p}} T$$

C'est un analogue p -adique de la norme reflex en théorie de la multiplication complexe. On en déduit un morphisme

$$N_\mu : E^\times \longrightarrow T(\mathbb{Q}_p).$$

Exemple 3.1.1. Soit $F|\mathbb{Q}_p$ une extension de degré fini « abstraite », c'est à dire non plongée dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$ et $T = \text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \mathbb{G}_m$. Soit $\tilde{I}_F = \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(F, \overline{\mathbb{Q}_p})$ sur lequel agit $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|\mathbb{Q}_p)$. On a comme $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|\mathbb{Q}_p)$ -module, $X_*(T) = \mathbb{Z}[\tilde{I}_F]$. Soit $\mu = \sum_{\tau \in \tilde{I}_F} p_\tau[\tau] \in X_*(T)$. Alors,

$$\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|E) = \{\gamma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|\mathbb{Q}_p) \mid \forall \tau \in \tilde{I}_F, p_{\gamma\tau} = p_\tau\}.$$

Fixons $\tau_0 \in \tilde{I}_F$. Pour $\gamma \in \tilde{I}_E = \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(E, \overline{\mathbb{Q}_p})$, soit $\tilde{\gamma} \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|\mathbb{Q}_p)$ prolongeant γ . Alors, $p_{\tilde{\gamma}^{-1}\tau_0}$ ne dépend pas du choix du relèvement $\tilde{\gamma}$ de γ . On a

$$\begin{aligned} N_\mu : E^\times &\longrightarrow F^\times \\ x &\longmapsto \tau_0^{-1} \left(\prod_{\gamma \in \tilde{I}_E} \gamma(x)^{p_{\tilde{\gamma}^{-1}\tau_0}} \right) \end{aligned}$$

qui ne dépend pas du choix fait de τ_0 .

Soit $\overline{E} = \overline{\mathbb{Q}_p}$ et

$$\text{rec}_E : E^\times \longrightarrow \text{Gal}(\overline{E}|E)^{ab}$$

l'application de réciprocité d'Artin normalisée de telle manière qu'une uniformisante de E s'envoie sur un Frobenius arithmétique de $\text{Gal}(\overline{E}|E)$. On note I_E le sous-groupe d'inertie de $\text{Gal}(\overline{E}|E)$ et E^{ab} l'extension abélienne maximale de E . On note \check{E} la clôture algébrique de \check{E} déduite de celle fixée $\overline{E} = \overline{\mathbb{Q}_p}$ de E . On a donc $I_E = \text{Gal}(\check{E}|\check{E})$.

Définition 3.1.1. On note

$$\chi_\mu : I_E \longrightarrow T(\mathbb{Q}_p)$$

le morphisme composé

$$\begin{aligned} I_E &\longrightarrow \mathcal{O}_E^\times \xrightarrow{N_\mu} T(\mathbb{Q}_p) \\ \gamma &\longmapsto \text{rec}_E^{-1}(\gamma|_{E^{ab}}). \end{aligned}$$

3.2. Tour de Rapoport-Zink torique. Soit $\text{Et}_{\check{E}}$ la catégorie des espaces rigides de dimension 0 étales sur $\text{Sp}(\check{E})$ et $\bar{x} : \text{Sp}(\mathbb{C}_p) \rightarrow \text{Sp}(\check{E})$ un point géométrique avec $\mathbb{C}_p = \widehat{\overline{\mathbb{Q}_p}}$. Alors le foncteur fibre :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\bar{x}} : \text{Et}_{\check{E}} &\rightarrow \mathcal{E}\text{ns} \\ Y &\mapsto Y_{\bar{x}} = \{\bar{y} : \text{Sp}(\mathbb{C}_p) \rightarrow Y \mid f_Y(\bar{y}) = \bar{x}\} \end{aligned}$$

avec $f_Y : Y \rightarrow \text{Sp}(\check{E})$ le morphisme structural, induit une équivalence de catégories :

$$\mathcal{F}_{\bar{x}} : \text{Et}_{\check{E}} \xrightarrow{\sim} \pi_1(\text{Sp}(\check{E}), \bar{x}) - \mathcal{E}\text{ns}$$

où $\pi_1(\text{Sp}(\check{E}), \bar{x}) - \mathcal{E}\text{ns}$ désigne la catégorie des ensembles (avec la topologie discrète) munis d'une action continue de $\pi_1(\text{Sp}(\check{E}), \bar{x}) = \text{Gal}(\check{E}|\check{E})$.

Définition 3.2.1. Soit K un sous-groupe compact ouvert de $T(\mathbb{Q}_p)$. On note $\check{\mathcal{M}}(T, \mu)_K$ l'unique espace rigide étale de dimension 0 sur \check{E} tel que

$$\check{\mathcal{M}}(T, \mu)_K(\check{E}) = T(\mathbb{Q}_p)/K$$

et l'action de $\sigma \in I_E$ soit donnée par : si $\gamma \in I_E$ alors

$$\gamma(xK) = \chi_\mu(\gamma)xK.$$

On obtient ainsi une tour d'espaces rigides de dimension 0

$$(\check{\mathcal{M}}(T, \mu)_K)_K.$$

Si M est l'extension de degré fini de \check{E} dans $\overline{\check{E}}$ telle que

$$\text{Gal}(\overline{\check{E}}|M) = \ker \left(I_E \xrightarrow{\chi_\mu} T(\mathbb{Q}_p) \rightarrow T(\mathbb{Q}_p)/K \right),$$

on a

$$\check{\mathcal{M}}(T, \mu)_K \simeq \coprod_{N_\mu(\mathcal{O}_E^\times) \backslash T(\mathbb{Q}_p)/K} \text{Sp}(M).$$

Définition 3.2.2. La tour est munie d'une action de $J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p)$ en posant pour $(a, b) \in J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p)$ et $xK \in T(\mathbb{Q}_p)/K$

$$(a, b).xK = abxK$$

qui définit un isomorphisme

$$(a, b) : \check{\mathcal{M}}(T, \mu)_K \xrightarrow{\sim} \check{\mathcal{M}}(T, \mu)_K.$$

Soit $\Delta = \text{Hom}(X_{\mathbb{Q}_p}^*(T), \mathbb{Z})$. Il y a une application I_E -invariante

$$\begin{aligned} \varkappa : T(\mathbb{Q}_p)/K &\longrightarrow \Delta \\ xK &\longmapsto [\chi \mapsto v_p(\chi(x))] \end{aligned}$$

qui induit un morphisme d'espaces rigides

$$\varkappa : \check{\mathcal{M}}(T, \mu)_K \longrightarrow \Delta$$

où Δ est vu comme l'espace rigide de dimension 0, $\coprod_{\Delta} \text{Sp}(\check{E})$ (ou si l'on veut \varkappa est une application de l'ensemble discret $|\check{\mathcal{M}}(T, \mu)|$ vers Δ).

Si T est un tore non-ramifié sur \mathbb{Q}_p , notons $T(\mathbb{Z}_p)$ les \mathbb{Z}_p -points de son modèle entier canonique. C'est un sous-groupe compact maximal dans $T(\mathbb{Q}_p)$. Il y a une bijection

$$\begin{aligned} X_*(T)_{\mathbb{Q}_p} &\xrightarrow{\sim} T(\mathbb{Q}_p)/T(\mathbb{Z}_p) \\ \nu &\longmapsto \nu(p)T(\mathbb{Z}_p) \end{aligned}$$

où $X_*(T)_{\mathbb{Q}_p}$ désigne les cocaractères rationnels. Soit Δ' l'image dans Δ de l'application

$$\begin{aligned} X_*(T)_{\mathbb{Q}_p} &\longrightarrow \Delta \\ \nu &\longmapsto [\chi \mapsto \langle \chi, \nu \rangle]. \end{aligned}$$

On a alors

$$\pi_0(\check{\mathcal{M}}(T, \mu)_{T(\mathbb{Z}_p)} \hat{\otimes}_{\check{E}} \mathbb{C}_p) \xrightarrow{\sim} \pi_0(\check{\mathcal{M}}(T, \mu)_{T(\mathbb{Z}_p)}) \xrightarrow[\sim]{\varkappa} \Delta'$$

c'est à dire $\Delta' = \text{Im } \varkappa$ et

$$\check{\mathcal{M}}(T, \mu)_{T(\mathbb{Z}_p)} = \coprod_{\Delta'} \text{Sp}(\check{E}).$$

3.3. Donnée de descent de Rapoport-Zink pour la tour de Rapoport-Zink torique. Fixons une inclusion $\bar{x} : \check{E} \hookrightarrow \overline{\check{E}}$. Pour un automorphisme $\tau : \check{E} \rightarrow \check{E}$ stabilisant les éléments de E , fixons un relèvement $\tilde{\tau} : \overline{\check{E}} \xrightarrow{\sim} \overline{\check{E}}$ de τ au sens où le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} \overline{\check{E}} & \xrightarrow{\tilde{\tau}} & \overline{\check{E}} \\ \uparrow \bar{x} & & \uparrow \bar{x} \\ \check{E} & \xrightarrow{\tau} & \check{E} \end{array}$$

Soit X un espace rigide étale sur $\text{Sp } \check{E}$. Alors via $\mathcal{F}_{\bar{x}}$, l'espace rigide étale τ^*X correspond à l'ensemble $X_{\tau(\bar{x})}$ muni d'une action

$$\pi_1(\text{Sp } \check{E}, \bar{x}) \xrightarrow{\pi_1(\tau)} \pi_1(\text{Sp } \check{E}, \tau(\bar{x})) \rightarrow \text{Aut}(X_{\tau(\bar{x})})$$

où

– $\tau(\bar{x})$ est le point géométrique

$$\text{Sp}(\mathbb{C}_p) \xrightarrow{\bar{x}} \text{Sp}(\check{E}) \xrightarrow{\tau} \text{Sp}(\check{E});$$

– la flèche à gauche $\pi_1(\tau)$ est le morphisme de groupes fondamentaux du morphisme $\tau : \text{Sp}(\check{E}) \rightarrow \text{Sp}(\check{E})$;
– la flèche à droite est fournie par l'image de X via le foncteur $\mathcal{F}_{\tau(\bar{x})}$.

L'isomorphisme $\tilde{\tau}$ induit un isomorphisme de foncteurs

$$\alpha_{\tilde{\tau}, \bar{x}} : \mathcal{F}_{\tau(\bar{x})} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{\bar{x}}$$

comme suit : soit Y un espace rigide étale sur \check{E} , alors

$$\alpha_{\tilde{\tau}, \bar{x}}(Y) : \{\bar{y} : \mathrm{Sp}(\mathbb{C}_p) \rightarrow Y \mid f_Y(\bar{y}) = \tau(\bar{x})\} = Y_{\tau(\bar{x})} \rightarrow Y_{\bar{x}} = \{\bar{y} : \mathrm{Sp}(\mathbb{C}_p) \rightarrow Y \mid f_Y(\bar{y}) = \bar{x}\}$$

$$\bar{y} \mapsto \bar{y} \circ \tilde{\tau}^{-1}$$

où $\tilde{\tau}^{-1} : \mathrm{Sp}(\mathbb{C}_p) \rightarrow \mathrm{Sp}(\mathbb{C}_p)$ correspond à $\tilde{\tau}^{-1} : \check{E} \rightarrow \check{E}$ par l'abus de notation.

De plus, $\alpha_{\tilde{\tau}, \bar{x}}$ induit un isomorphisme de groupes fondamentaux :

$$\gamma_{\tilde{\tau}} : \pi_1(\mathrm{Sp}(\check{E}), \tau(\bar{x})) = \mathrm{Gal}(\check{E}_{\tau(\bar{x})}/\check{E}) \rightarrow \mathrm{Gal}(\check{E}_{\bar{x}}/\check{E}) = \pi_1(\mathrm{Sp}(\check{E}), \bar{x})$$

$$g \mapsto \tilde{\tau}^{-1} g \tilde{\tau}$$

où l'indice en bas de \check{E} précise le plongement $\check{E} \hookrightarrow \check{E}$. On en déduit immédiatement le lemme suivant :

Lemme 3.3.1. *Fixons un point géométrique $\bar{x} : \mathrm{Sp}(\mathbb{C}_p) \rightarrow \mathrm{Sp}(\check{E})$. Soient $\tau : \check{E} \xrightarrow{\sim} \check{E}$ un automorphisme de \check{E} stabilisant les éléments de E et $\tilde{\tau} : \check{E} \xrightarrow{\sim} \check{E}$ un relèvement de τ . Soit X un espace rigide étale sur $\mathrm{Sp}(\check{E})$. Alors se donner un morphisme (resp. isomorphisme) $X \rightarrow \tau^* X$ est équivalent à se donner une application (resp. bijection) $X_{\bar{x}} \rightarrow X_{\bar{x}}$ compatible à l'action de $\pi_1(\mathrm{Sp}(\check{E}), \bar{x})$ via*

$$\tilde{\gamma}_{\tilde{\tau}} : \pi_1(\mathrm{Sp}(\check{E}), \bar{x}) \xrightarrow{\pi_1(\tau)} \pi_1(\mathrm{Sp}(\check{E}), \tau(\bar{x})) \xrightarrow{\tilde{\gamma}_{\tilde{\tau}}} \pi_1(\mathrm{Sp}(\check{E}), \bar{x}).$$

Fixons π_E une uniformisante de E . Posons $\tilde{\sigma}_E := \mathrm{rec}_E(\pi_E) \in \mathrm{Gal}(\check{E}|E)^{ab}$. Soit E_{π_E} le sous corps de E^{ab} fixé par $\tilde{\sigma}_E$. Alors $E^{ab} = E_{\pi_E} E^{nr}$, où E_{π_E} et E^{nr} sont linéairement disjoints. De plus, $(\tilde{\sigma}_E)|_{E^{nr}} \in \mathrm{Gal}(E^{nr}|E)$ est le Frobenius. On prend un antécédent de $\tilde{\sigma}_E$ via $\mathrm{Gal}(\check{E}|E) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(E^{ab}|E)$. Par l'abus de notation, on le note encore $\tilde{\sigma}_E$. Alors $\tilde{\sigma}_E$ est un relèvement de Frobenius.

Remarque 3.3.1. *La réciproque de l'application de réciprocity d'Artin $\mathrm{rec}_E^{-1} : I_E \rightarrow \mathcal{O}_E^\times$ factorise via*

$$\mathrm{Gal}(E^{ab}|E^{nr}) = I_E / \mathrm{Ker}(\mathrm{rec}_E^{-1}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_E^\times$$

qu'on note encore rec_E^{-1} . Alors le morphisme composé

$$(3) \quad \mathrm{Gal}(\check{E}|E) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(E^{ab}|E) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(E_{\pi_E}|E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(E^{ab}|E^{nr}) \xrightarrow{\mathrm{rec}_E^{-1}} \mathcal{O}_E^\times$$

coïncide avec χ_{LT_E, π_E}^{-1} d'après [CF86] Ch VI, §3.4, thm 3, où χ_{LT_E, π_E} est le caractère module de Tate d'un groupe de Lubin-Tate sur \mathcal{O}_E associé à la uniformisante π_E . Donc $\chi_{LT_E, \pi_E}^{-1}(\tilde{\sigma}_E) = 1$.

Définition 3.3.1. *La donnée de descente de Rapoport-Zink pour l'espace rigide $\check{M}(T, \mu)_K$ est un isomorphisme $\check{M}(T, \mu)_K \xrightarrow{\sim} \sigma_E^* \check{M}(T, \mu)_K$ qui correspond à la bijection*

$$\times N_\mu(\pi_E^{-1}) : \check{M}(T, \mu)_K(\check{E}) = T(\mathbb{Q}_p)/K \rightarrow T(\mathbb{Q}_p)/K = \check{M}(T, \mu)_K(\check{E})$$

$$xK \mapsto N_\mu(\pi_E^{-1})xK$$

compatible à l'action de I_E via lemme 3.3.1 pour \bar{x} , σ_E et $\tilde{\sigma}_E$ comme précédent.

Remarque 3.3.2. (1) *La donnée de descente de Rapoport-Zink pour l'espace rigide $\check{M}(T, \mu)_K$ ne dépend pas de l'uniformisante π_E choisie.*

(2) *A l'aide de la théorie du corps de classes local, le morphisme composé*

$$I_E \xrightarrow{\tilde{\gamma}_{\tilde{\sigma}_E}} I_E \xrightarrow{\mathrm{rec}_E^{-1}} \mathcal{O}_E^\times$$

coïncide avec le morphisme rec_E^{-1} . Donc dans la définition précédente, la compatibilité de l'action de I_E est équivalent à celle de l'action de I_E via $\tilde{\gamma}_{\tilde{\sigma}_E}$.

(3) *L'inverse de l'application de réciprocity d'Artin $\mathrm{rec}_E^{-1} : I_E \rightarrow \mathcal{O}_E^\times$ prolonge en un morphisme :*

$$W_E \rightarrow E^\times$$

en associant π_E à $\tilde{\sigma}_E$, où W_E est le groupe de Weil. Donc $\chi_\mu : I_E \rightarrow T(\mathbb{Q}_p)$ se prolonge en

$$(4) \quad \tilde{\chi}_\mu : W_E \rightarrow E^\times \xrightarrow{N_\mu} T(\mathbb{Q}_p)$$

L'espace rigide $\check{M}(T, \mu)_K$ muni de la donnée de Rapoport-Zink correspond donc à la fibre $\check{M}(T, \mu)_K(\overline{E})$ muni d'une action de W_E via $\tilde{\chi}_\mu$.

La foncteur $\mathcal{F}_{\bar{x}}$ induit aussi une équivalence de catégories :

$$\mathcal{F}_{\bar{x}} : \mathcal{O}_F - \text{Loc} \xrightarrow{\sim} \pi_1(\text{Sp}(\check{E}), \bar{x}) - \mathcal{O}_F - \text{mod}$$

où $\pi_1(\text{Sp}(\check{E}), \bar{x}) - \mathcal{O}_F - \text{mod}$ désigne la catégorie des \mathcal{O}_F -modules libres de rang fini munis d'une action continue de $\pi_1(\text{Sp}(\check{E}), \bar{x})$. On en déduit une variation du lemme 3.3.1 :

Lemme 3.3.2. *Soient $\bar{x} : \text{Sp}(\mathbb{C}_p) \rightarrow \text{Sp}(\check{E})$, $\tau \in \check{E} \xrightarrow{\sim} \check{E}$ un automorphisme stabilisant les éléments de E et $\tilde{\tau} : \overline{E} \xrightarrow{\sim} \overline{E}$ un relèvement de τ . Soit \mathcal{L} un \mathcal{O}_F -système local sur $\text{Sp}(\check{E})$. Alors se donner un morphisme de \mathcal{O}_F -systèmes locaux $\mathcal{L} \rightarrow \tau^*\mathcal{L}$ est équivalent à se donner un homomorphisme de \mathcal{O}_F -modules $\mathcal{L}_{\bar{x}} \rightarrow \mathcal{L}_{\tilde{\tau}}$ compatible à l'action de $\pi_1(\text{Sp}(\check{E}), \bar{x})$ via $\tilde{\gamma}_{\tilde{\tau}}$.*

3.4. Lien avec les représentations cristallines abéliennes. Soit L le complété de l'extension maximale non-ramifiée de \mathbb{Q}_p dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$ et $B(T)$ l'ensemble associé de Kottwitz. Comme expliqué dans la remarque 3.1.1, le choix de $\mu \in X_*(T)$ détermine complètement un unique $\bar{b} \in B(T)$ tel que $\bar{b} \in B(T, \mu)$. Plus précisément, d'après ([Kot85] 2.5), si E^0 est l'extension maximale non-ramifiée de \mathbb{Q}_p dans E on peut prendre

$$b = N_{E/E^0}(\mu(\pi_E))$$

où π_E est une uniformisante de E . D'après la proposition 1.21 de [RZ96] la paire (b, μ) est admissible et définit donc un foncteur exact compatible au produit tensoriel

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{b, \mu} : \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p} T &\longrightarrow \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{cris}} I_E \\ (V, \rho) &\longmapsto \text{Fil}_{\rho \circ \mu}^0 (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{E}}))^{\rho(b) \otimes \varphi = \text{Id}} \end{aligned}$$

où

- $G_E = \text{Gal}(\overline{E}|E)$ et $\text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{cris}} G_E$ désigne les représentations cristallines de G_E
- La filtration $\text{Fil}_{\rho \circ \mu}^\bullet$ de $V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \check{E}$ est définie par : $\text{Fil}^i V_{\check{E}}$ est la somme directe des espaces isotypiques où le caractère $\rho \circ \mu$ agit via $z \mapsto z^k$ avec $k \geq i$.
- $\rho(b) \in \text{End}_L(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} L) \subset \text{End}_{B_{\text{cris}}}(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\text{cris}})$ et $\rho(b) \otimes \varphi$ est obtenu en composant $\rho(b)$ avec $\text{Id} \otimes \varphi$ où φ est le Frobenius cristallin de B_{cris} .

D'après la proposition 1.20 de [RZ96] le torseur des périodes associé à (b, μ) est trivial au sens où le foncteur fibre obtenu par composition

$$\text{Rep}_{\mathbb{Q}_p} T \xrightarrow{\mathcal{F}_{b, \mu}} \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{cris}} I_E \longrightarrow \text{Vect}_{\mathbb{Q}_p}$$

est isomorphe au foncteur fibre canonique sur la catégorie Tannakienne $\text{Rep}_{\mathbb{Q}_p} T$. Cela signifie que pour $(V, \rho) \in \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(T)$, après choix d'un isomorphisme entre ces deux foncteurs fibres, on peut voir la représentation cristalline $\mathcal{F}_{b, \mu}(V, \rho)$ comme une représentation

$$\mathcal{F}_{b, \mu}(V, \rho) : I_E \longrightarrow \text{GL}_{\mathbb{Q}_p}(V).$$

Rappelons le lemme suivant.

Lemme 3.4.1 ([RZ96] lemme 1.22). *Le groupe de Galois I_E agit sur l'espace de la représentation $\mathcal{F}_{b, \mu}(V, \rho)$ via*

$$\rho \circ \chi_\mu : I_E \longrightarrow \text{GL}(V)$$

et ce, puisque $T(\mathbb{Q}_p)$ est abélien, indépendamment du choix d'un isomorphisme entre les deux foncteurs fibres précédents $\text{Rep}_{\mathbb{Q}_p} T \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{Q}_p}$.

Remarquons que puisque pour tout $g \in J(\mathbb{Q}_p) = T(\mathbb{Q}_p)$, $gbg^{-\sigma} = b$ et $g\mu g^{-1} = \mu$, le groupe $J(\mathbb{Q}_p)$ agit sur le foncteur $\mathcal{F}_{b, \mu}$. Voici maintenant une description en termes de structures de niveau des espaces de Rapoport-Zink toriques précédents.

Proposition 3.4.1. *L'espace $\check{\mathcal{M}}(T, \mu)_K$ admet la description suivante.*

Notons $\omega_0 : \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{cris}} I_E \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{Q}_p}$ et $\omega_{\text{can}} : \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p} T \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{Q}_p}$ les foncteurs fibres canoniques. Soit $M|\check{E}$ une extension de degré fini dans \check{E} . Alors,

$$\check{\mathcal{M}}(T, \mu)_K(M) \simeq \{\eta\} / \sim$$

où :

- $\eta : \omega_{\text{can}} \xrightarrow{\sim} \omega_0 \circ \mathcal{F}_{b, \mu}$ est un isomorphisme de foncteurs fibres tel que pour tout $(V, \rho) \in \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p} T$, l'action de $\text{Gal}(\check{E}|M)$ sur le \mathbb{Q}_p -espace vectoriel $\omega_0 \circ \mathcal{F}_{b, \mu}(V, \rho)$ se fasse via η à travers le sous-groupe $\rho(K) \subset \text{GL}(V) = \text{GL}(\omega_{\text{can}}(V, \rho))$.
- On a $\eta \sim \eta'$ si et seulement s'il existe $g \in K$ tel que η' soit obtenu à partir de η par composition avec l'isomorphisme de foncteur fibre $\omega_{\text{can}} \xrightarrow{\sim} \omega_{\text{can}}$ fourni par g .

L'action de $g \in J(\mathbb{Q}_p) = T(\mathbb{Q}_p)$ est donnée par composition de η avec $g : \mathcal{F}_{b, \mu} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{b, \mu}$. Celle de $g \in G(\mathbb{Q}_p) = T(\mathbb{Q}_p)$ est donnée par $\eta \mapsto \eta \circ g$.

Démonstration. Fixons un isomorphisme de foncteurs fibres

$$u : \omega_{\text{can}} \xrightarrow{\sim} \omega_0 \circ \mathcal{F}_{b, \mu}$$

(l'isomorphisme que l'on construit dépend d'un tel choix). Il y a alors une bijection

$$\begin{aligned} T(\mathbb{Q}_p) &\xrightarrow{\sim} \text{Isom}(\omega_{\text{can}}, \omega_0 \circ \mathcal{F}_{b, \mu}) \\ x &\longmapsto u \circ x. \end{aligned}$$

Celle-ci induit une bijection

$$T(\mathbb{Q}_p)/K \xrightarrow{\sim} \text{Isom}(\omega_{\text{can}}, \omega_0 \circ \mathcal{F}_{b, \mu}) / \sim$$

où deux isomorphismes entre ω_{can} et $\omega_0 \circ \mathcal{F}_{b, \mu}$ sont équivalents s'ils diffèrent par composition avec un élément de K . Maintenant, si $M|\check{E}$ est comme dans l'énoncé, $g \in T(\mathbb{Q}_p)$, d'après le lemme 3.4.1, via $\eta = u \circ g$, l'action de $\text{Gal}(\check{E}|M)$ sur $\omega_0 \circ \mathcal{F}_{b, \mu}$ se fait à travers K si et seulement si

$$xK \in (T(\mathbb{Q}_p)/K)^{\text{Gal}(\check{E}|M)}$$

où $\text{Gal}(\check{E}|M)$ agit sur $T(\mathbb{Q}_p)/K$ par translations via χ_μ . □

Remarque 3.4.1. *La description précédente de $\check{\mathcal{M}}(T, \mu)_K$ dépend du choix d'un isomorphisme de foncteurs fibres $\omega_{\text{can}} \xrightarrow{\sim} \omega_0 \circ \mathcal{F}_{b, \mu}$. La bonne définition des espaces de Rapoport-Zink $\check{\mathcal{M}}(T, \mu)_K$ est peut-être celle donnée dans la proposition précédente qui paraît plus intrinsèque que celle de la définition 3.2. En effet, la définition 3.2 suppose en quelque sorte que l'on a fixé un point base dans $\check{\mathcal{M}}(T, \mu)$ pour identifier ses points géométriques, qui forment un espace homogène sous $T(\mathbb{Q}_p)$, à $T(\mathbb{Q}_p)/K$.*

Soit $(V, \rho) \in \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p} T$. La représentation

$$\rho \circ \chi_\mu : I_E \longrightarrow \text{GL}(V)$$

définit un \mathbb{Q}_p -système local étale

$$\mathcal{L}_{\mu, \rho}$$

sur $\text{Sp}(\check{E})$ (il n'y a pas d'ambiguïté à définir ce qu'est un \mathbb{Q}_p -système local étale sur un espace rigide de dimension 0). Le tiré en arrière de ce système local sur $\check{\mathcal{M}}(T, \mu)_K$ à pour fibres géométriques

$$(T(\mathbb{Q}_p) \times V)/K \longrightarrow T(\mathbb{Q}_p)/K$$

au dessus de $\check{\mathcal{M}}(T, \mu)_K$. En termes de la description donnée dans la proposition 3.4.1, $\check{\mathcal{M}}(T, \mu)_K(\check{E}) = \{\eta : \omega_{\text{can}} \xrightarrow{\sim} \omega_0 \circ \mathcal{F}_{b, \mu}\}$, la fibre en η de ce système local munie de son action de Galois est la représentation cristalline $\mathcal{F}_{b, \mu}(V, \rho)$.

4. LE MORPHISME DÉTERMINANT POUR LE TYPE E.L.

4.1. Notations. Soient $(F, V, \bar{b}, \bar{\mu})$ une donnée locale de type E.L. non ramifiée simple et $\check{\mathcal{M}} := \check{\mathcal{M}}(b, \mu)$ l'espace de Rapoport-Zink associé. On reprend les notations de la section 2.2. Comme F et E sont non-ramifiés, on prend toujours $\pi_E = \pi_F = p$ comme une uniformisante de E et de F .

Précisons le scindage de $\check{\mathcal{M}}$ par Δ dans ce cas là. Comme $X_{\mathbb{Q}_p}^*(G) \simeq \mathbb{Z}$ est engendré par

$$\begin{aligned} \text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \text{GL}_F(V) &\longrightarrow \mathbb{G}_m \\ g &\longmapsto \det_{\mathbb{Q}_p}(g, V) = N_{F/\mathbb{Q}_p}(\det_F(g, V)) \end{aligned}$$

où $\det_{\mathbb{Q}_p}(g, V)$ désigne le déterminant de l'homomorphisme \mathbb{Q}_p -linéaire $g : V \rightarrow V$, on a $\Delta \simeq \mathbb{Z}$. Les applications \varkappa et ω_J sont définies par

$$\begin{aligned} \varkappa : \quad \check{\mathcal{M}} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (X, \rho) &\longmapsto -\text{ht} \rho \\ \omega_J : \quad J(\mathbb{Q}_p) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ g &\longmapsto v_p(\det_L(g, V \otimes_{\mathbb{Q}_p} L)). \end{aligned}$$

Rappelons que l'on note $d = [F : \mathbb{Q}_p]$.

Lemme 4.1.1. *L'image de \varkappa est $d\mathbb{Z}$.*

Démonstration. D'après le lemme 3.53 de [RZ96] et puisque $0 \in \text{Im } \varkappa$ (cf. remarque 2.5.1) on a $\text{Im } \varkappa \subset d\mathbb{Z}$. Puisque l'image de ω_J est $d\mathbb{Z}$ on en déduit le résultat. \square

On définit maintenant :

– $D := G/G^{\text{der}}$, où G^{der} désigne le groupe dérivé de G . On note

$$\det : G \longrightarrow D.$$

– $\det \tilde{\mu}$: le caractère

$$\det \tilde{\mu} : \mathbb{G}_m \xrightarrow{\tilde{\mu}} \mathbb{G}_{\overline{\mathbb{Q}_p}} \longrightarrow D_{\overline{\mathbb{Q}_p}}$$

– $\det K$: l'image d'un sous-groupe compact ouvert K de $G(\mathbb{Q}_p)$ via le morphisme $G(\mathbb{Q}_p) \rightarrow D(\mathbb{Q}_p)$.

Le morphisme

$$\begin{aligned} \text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \text{GL}_F(V) &\longrightarrow \text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \mathbb{G}_m \\ g &\longmapsto \det_F(g, V). \end{aligned}$$

induit un isomorphisme

$$D \xrightarrow{\sim} \text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \mathbb{G}_m.$$

Via cet isomorphisme le générateur de $X^*(G)$ donné au début de cette section est

$$G \xrightarrow{\det} D \xrightarrow{N_{F/\mathbb{Q}_p}} \mathbb{G}_m.$$

On a alors

$$X_*(D) = \bigoplus_{\tau \in \check{I}_F} \mathbb{Z}[\tau]$$

où via la décomposition

$$D_{\overline{\mathbb{Q}_p}} = \prod_{\tau \in \check{I}_F} \mathbb{G}_{m_{\overline{\mathbb{Q}_p}}},$$

l'élément $[\tau] \in X_*(D)$ est donné par

$$z \longmapsto (1, \dots, 1, z, 1, \dots, 1)$$

où z est placé en indice τ . Alors,

$$\det \tilde{\mu} = - \sum_{\tau} p_{\tau} [\tau].$$

Puisque J est une forme intérieure d'un sous-groupe de Levi de G , il existe un morphisme canonique

$$\det : J \longrightarrow D$$

tel que pour $g \in J(\mathbb{Q}_p) \subset G(L)$, c'est à dire $gb\sigma = b\sigma g$,

$$\det(g) = \det_{F \otimes_{\mathbb{Q}_p} L}(g, V \otimes_{\mathbb{Q}_p} L) \in F^\times.$$

4.2. L'espace déterminant $\det(\check{\mathcal{M}})_K$.

4.2.1. *Le système local déterminant.* Soit maintenant H_{LT} un groupe p -divisible de Lubin-Tate sur \mathcal{O}_F associé à l'uniformisante p ([CF86] VI.3.3). Cela signifie que H_{LT} est un groupe formel p -divisible de dimension 1 sur \mathcal{O}_F , de hauteur $[F : \mathbb{Q}_p]$ et muni d'une action de \mathcal{O}_F telle que l'action induite sur $\text{Lie } H_{LT}$ soit l'action tautologique. On note

$$T_p(H_{LT})$$

le \mathcal{O}_F -système local étale rigide sur $\text{Sp } F$ muni d'une action de \mathcal{O}_F donné par $(H_{LT}[p^m]^{rig})_{m \geq 1}$ (cf. définition 2.6.2). On fixe un point géométrique $\bar{x} : \text{Sp}(\mathbb{C}_p) \rightarrow \text{Sp}(\check{E})$. Cela induit une bijection

$$\check{I}_F := \text{Hom}(F, \overline{\mathbb{Q}_p}) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(\mathcal{O}_F, \mathcal{O}_{\check{E}}).$$

On identifie ces deux ensembles dans la suite. Pour $\tau \in \check{I}_F$, on note

$$\mathcal{L}_\tau = \tau^* T_p(H_{LT}) = T_p(H_{LT} \otimes_{\mathcal{O}_F, \tau} \mathcal{O}_{\check{E}})$$

comme \mathcal{O}_F -système local étale sur $\text{Sp } \check{E}$.

Définition 4.2.1. On définit un \mathcal{O}_F -système local étale sur $\text{Sp } \check{E}$

$$\mathcal{L}_{\bar{\mu}} := \bigotimes_{\tau \in \check{I}_F} \mathcal{L}_\tau^{\otimes p\tau}$$

où le produit tensoriel est pris au dessus de \mathcal{O}_F .

Si $\mathcal{L}_{\bar{\mu}} = (\mathcal{L}_{\bar{\mu}, m})_{m \geq 1}$ on fera l'abus de notation qui consiste à écrire

$$\mathcal{L}_{\bar{\mu}} \otimes \mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z} = \mathcal{L}_{\bar{\mu}}/p^m \mathcal{L}_{\bar{\mu}} = \mathcal{L}_{\bar{\mu}, m}.$$

Pour tout $\tau \in \check{I}_F$ notons

$$\chi_{LT, \tau} : I_E = \text{Gal}(\overline{\check{E}}|\check{E}) \longrightarrow \mathcal{O}_F^\times$$

le caractère de Lubin-Tate donnant l'action de $\text{Gal}(\overline{\check{E}}|\check{E})$ sur la fibre au point géométrique $\bar{x} : \text{Sp}(\mathbb{C}_p) \rightarrow \text{Sp}(\check{E})$ de \mathcal{L}_τ . Si $\gamma \in \text{Gal}(F|\mathbb{Q}_p)$ on a

$$\chi_{LT, \tau\gamma} = \gamma^{-1} \circ \chi_{LT, \tau}.$$

En effet, si $\iota : \mathcal{O}_F \xrightarrow{\sim} \text{End}(H_{LT})$ désigne l'action de \mathcal{O}_F alors $H_{LT, \tau\gamma} = \tau^* \gamma^* H_{LT}$. Or, le groupe p -divisible $\gamma^* H_{LT}$ muni de l'action $\mathcal{O}_F \xrightarrow{\gamma^{-1}} \mathcal{O}_F \xrightarrow{\gamma^* \iota} \text{End}(\gamma^* H_{LT})$ est un groupe de Lubin-Tate.

La fibre géométrique en $\text{Sp}(\overline{\check{E}}) \rightarrow \text{Sp}(\check{E})$ de $\mathcal{L}_{\bar{\mu}}$ munie de son action de Galois est donnée par le caractère

$$\prod_{\tau \in \check{I}_F} \chi_{LT, \tau}^{p\tau} : I_E \longrightarrow \mathcal{O}_F^\times.$$

Si $\tau_0 : F \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ est fixé, ce caractère s'écrit

$$\prod_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} \gamma^{-i} \circ \chi_{LT, \tau_0}^{p_i}$$

où $\text{Gal}(F|\mathbb{Q}_p) = \langle \gamma \rangle$ et $p_i = p_{\tau_0 \gamma^i}$. Puisque $F|\mathbb{Q}_p$ est non-ramifiée, $E \subset \tau_0(F)$. Notons $d' = [E : \mathbb{Q}_p]$ et

$$\chi_{LT_E} : I_E \longrightarrow \mathcal{O}_E^\times$$

le caractère de Lubin-Tate de E . On a alors

$$\begin{aligned}
\prod_{\tau \in \tilde{I}_F} \chi_{LT, \tau}^{p_\tau} &= \prod_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} \gamma^{-i} \circ \chi_{LT, \tau_0}^{p_i} \\
&= \prod_{i \in \mathbb{Z}/d'\mathbb{Z}} \prod_{j \in d'\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} \gamma^{-i} \circ \tau_0^{-1} \circ (\tau_0 \circ \gamma^{-j} \circ \tau_0^{-1}) \circ \chi_{LT, \tau_0}^{p_i} \\
&= \prod_{i \in \mathbb{Z}/d'\mathbb{Z}} \gamma^{-i} \circ \tau_0^{-1} \circ N_{\tau_0(F)/E} \circ \chi_{LT, \tau_0}^{p_i} \\
(5) \qquad \qquad \qquad &= \prod_{i \in \mathbb{Z}/d'\mathbb{Z}} \gamma^{-i} \circ \tau_0^{-1} \circ \chi_{LT_E}^{p_i}.
\end{aligned}$$

Exemple 4.2.1. *Voici deux cas extrêmes :*

- (1) *Si tous les $(p_\tau)_\tau$ sont égaux, $p_\tau = k$, alors $E = \mathbb{Q}_p$ et le caractère précédent est χ_{cycl}^k .*
- (2) *S'il existe τ_0 tel que $p_{\tau_0} \neq 0$ et pour $\tau \neq \tau_0$, $p_\tau = 0$ alors $E = \tau_0(F)$ et le caractère précédent est $\tau_0^{-1} \circ \chi_{LT_E}^{p_{\tau_0}}$.*

4.2.2. *La tour d'espaces déterminant $(\det(\check{\mathcal{M}})_K)_K$: définition.*

Définition 4.2.2. *Notons $\det \Lambda_0 = \bigwedge_{\mathcal{O}_F}^n \Lambda_0$. Soit $K \subset \mathcal{O}_F^\times$ un sous groupe ouvert, on définit*

$$\det(\check{\mathcal{M}})_K = \coprod_{\delta \in \text{Im } \varkappa} \underline{\text{Isom}}(\det \Lambda_0 \otimes \mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z}, \mathcal{L}_{\check{\mu}} \otimes \mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z})/K, \quad m \gg 0$$

un espace rigide étale de dimension 0 sur $\text{Sp } \check{E}$, où $\det \Lambda_0 \otimes \mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z}$ est vu comme faisceau étale constant, $\underline{\text{Isom}}$ signifie les isomorphismes de faisceaux étales compatibles à l'action de \mathcal{O}_F et $m \gg 0$ signifie $\text{Id} + p^m \mathcal{O}_F \subset K$.

Les espaces $\det(\check{\mathcal{M}})_K$ sont munis d'une action de $D(\mathbb{Q}_p) \times D(\mathbb{Q}_p)$ de la façon suivante. Soit S un espace rigide sur $\text{Sp } \check{E}$. Soit $\delta \in \mathbb{Z}$, $m \geq 1$ et

$$\eta : \det \Lambda_0 / p^m \det \Lambda_0 \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{\check{\mu}} \otimes \mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z}$$

un isomorphisme au dessus de S . Soit $\delta \in \text{Im } \varkappa$. L'isomorphisme η définit un point dans la composante indexée par δ , $x \in \det(\check{\mathcal{M}})_{K_m}(S)$ où $K_m = \text{Id} + p^m \text{End}(\Lambda_0)$. Soient $(a, b) \in F^\times \times F^\times = D(\mathbb{Q}_p) \times D(\mathbb{Q}_p)$. Considérons l'isomorphisme

$$\begin{aligned}
u_{a,b} : \det \Lambda_0 \otimes \mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z} &\xrightarrow{\sim} \det \Lambda_0 \otimes \mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z} \\
z \otimes 1 &\longmapsto p^{-v_p(a) - v_p(b)} abz \otimes 1.
\end{aligned}$$

Alors, $\eta \circ u_{a,b}$ définit un élément $y = \det(\check{\mathcal{M}})_{K_m}(S)$ dans la composante indexée par

$$\delta + dv_p(a) + dv_p(b).$$

Par définition on pose $y = (a, b).x$. Cela définit une action de $F^\times \times F^\times$ sur $\det \check{\mathcal{M}}_{K_m}$. Celle-ci commute à l'action de $\text{End}(\Lambda_0)/K_m$. Cela étant vrai pour tout m , on en déduit l'existence d'une action de $F^\times \times F^\times$ sur $\det \check{\mathcal{M}}_K$ pour tout K . On a donc défini une action de $D(\mathbb{Q}_p) \times D(\mathbb{Q}_p)$ sur la tour $(\det(\check{\mathcal{M}})_K)_{K \subset D(\mathbb{Q}_p)}$.

Enfin, on définit une application localement constante de façon tautologique

$$\varkappa : \det(\check{\mathcal{M}})_K \longrightarrow \Delta$$

qui sur la composante indexée par δ vaut δ .

Rappelons que σ_E est le Frobenius par rapport à $\check{E}|E$. Alors $\sigma_E^* \mathcal{L}_\tau = \mathcal{L}_{\sigma_E \tau}$ et

$$\sigma_E^* \mathcal{L}_{\check{\mu}} = \otimes_{\tau \in \tilde{I}_F} \mathcal{L}_\tau^{\otimes p_{\sigma_E^{-1} \tau}} = \otimes_{\tau \in \tilde{I}_F} \mathcal{L}_\tau^{\otimes p_\tau} = \mathcal{L}_{\check{\mu}}.$$

Donc on a un isomorphisme canonique $\mathcal{L}_{\check{\mu}} \xrightarrow{\sim} \sigma_E^* \mathcal{L}_{\check{\mu}}$.

Pour $K \subset \mathcal{O}_F^\times$, la donnée de descente de Rapoport-Zink pour l'espace rigide $\det(\check{\mathcal{M}})_K$ est un isomorphisme

$$\alpha : \det(\check{\mathcal{M}})_K \xrightarrow{\sim} \sigma_E^* \det(\check{\mathcal{M}})_K$$

défini comme suit. Soit S un espace rigide connexe sur $\mathrm{Sp} \check{E}$. Soit $x = (\delta, \eta) \in \det(\check{\mathcal{M}})_K(S)$ avec $\delta \in \mathrm{Im} \varkappa$ et

$$\eta : \det \Lambda_0/p^m \det \Lambda_0 \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{\tilde{\mu}} \otimes \mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z} [K]$$

au dessus de S , alors l'image de x via α est défini par l'isomorphisme

$$\det \Lambda_0/p^m \det \Lambda_0 \xrightarrow{\eta} \mathcal{L}_{\tilde{\mu}} \otimes \mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \sigma_E^* \mathcal{L}_{\tilde{\mu}} \otimes \mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z} [K]$$

dans la composante indexée par

$$\delta + [E : \mathbb{Q}_p] \sum_{\tau \in \check{I}_F} p_\tau.$$

4.3. Comparaison avec l'espace de Rapoport-Zink associé au cocentre. Le corps reflex de la donnée de Rapoport-Zink torique $(D, \det \tilde{\mu})$ (cf. section 3) coïncide avec E le corps reflex de (G, μ) . Rappelons que l'on a défini dans la section 3 une norme reflex

$$N_{\det \tilde{\mu}} : E^\times \longrightarrow F^\times.$$

et grâce à l'application de réciprocity d'Artin un caractère

$$\chi_{\det \tilde{\mu}} : I_E \longrightarrow \mathcal{O}_F^\times$$

(cf. définition 3.1.1).

Lemme 4.3.1. *On a l'égalité*

$$\chi_{\det \tilde{\mu}} = \prod_{\tau \in \check{I}_F} \chi_{LT, \tau}^{p_\tau}.$$

Démonstration. Soit $\tau_0 \in \check{I}_F$ fixé. Puisque l'extension $F|\mathbb{Q}_p$ est galoisienne, $E \subset \tau_0(F)$. D'après la normalisation choisie de l'application de réciprocity d'Artin le composé

$$I_E \longrightarrow \mathrm{Gal}(E^{ab}|E^{nr}) \xrightarrow[\sim]{\mathrm{rec}_E^{-1}} \mathcal{O}_E^\times$$

coïncide avec $\chi_{LT_E}^{-1}$. On utilise la formule donnée dans l'exemple 3.1.1.

$$\begin{aligned} \chi_{\det \tilde{\mu}} &= \prod_{\gamma \in \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}_p)} \tau_0^{-1} \circ \gamma \circ \chi_{LT_E}^{p_{\gamma^{-1} \circ \tau_0}} \\ &= \prod_{\gamma \in \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}_p)} \tau_0^{-1} \circ \gamma^{-1} \circ \chi_{LT_E}^{p_{\gamma \circ \tau_0}} \\ &= \prod_{\gamma \in \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}_p)} (\tau_0^{-1} \circ \gamma^{-1} \circ \tau_0) \circ \tau_0^{-1} \circ \chi_{LT_E}^{p_{\tau_0 \circ (\tau_0^{-1} \circ \gamma \circ \tau_0)}} \end{aligned}$$

On conclut grâce à la formule 5. □

Proposition 4.3.1. *Soit $(\check{\mathcal{M}}(D, \det \tilde{\mu}))_K$ la tour d'espaces de Rapoport-Zink associée à la donnée torique $(D, \det \tilde{\mu})$ et $\varkappa_{D, \tilde{\mu}} : \check{\mathcal{M}}(D, \tilde{\mu}) \rightarrow \Delta$ (cf. section 3). Il y a alors un isomorphisme $D(\mathbb{Q}_p) \times D(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant de tours*

$$(\det(\check{\mathcal{M}})_K)_K \xrightarrow{\sim} (\check{\mathcal{M}}(D, \det \tilde{\mu}))_K$$

tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \det(\check{\mathcal{M}})_K & \longrightarrow & \check{\mathcal{M}}(D, \det \tilde{\mu})_K \\ & \searrow \varkappa & \swarrow \varkappa_{D, \tilde{\mu}} \\ & \Delta & \end{array}$$

De plus, cet isomorphisme est compatible à la donnée de descente de Rapoport-Zink.

Démonstration. Il suffit de construire un système compatible de bijections $D(\mathbb{Q}_p) \times D(\mathbb{Q}_p)$ -équivariantes lorsque K varie

$$\det(\check{\mathcal{M}})_K(\check{\bar{E}}) \xrightarrow{\sim} \check{\mathcal{M}}(D, \det \check{\mu})_K(\check{\bar{E}})$$

compatibles à l'action de I_E . Pour cela, fixons une base de $\det \Lambda_0$ c'est à dire identifions $\det \Lambda_0$ à \mathcal{O}_F . D'après le lemme 4.3.1, la fibre de $\mathcal{L}_{\check{\mu}}$ au point géométrique associé à $\check{\bar{E}}|\check{E}$ est \mathcal{O}_F muni de l'action de Galois donnée par $\chi_{\det \check{\mu}}$. On a alors

$$\begin{aligned} \det(\check{\mathcal{M}})_K(\check{\bar{E}}) &= \prod_{\delta \in d\mathbb{Z}} \text{Isom}_{\mathcal{O}_F}(\det \Lambda_0, \mathcal{O}_F)/K \\ &= \prod_{\delta \in d\mathbb{Z}} \mathcal{O}_F^\times/K \end{aligned}$$

où $\gamma \in I_E$ agit sur \mathcal{O}_F^\times/K via $xK \mapsto \chi_{\det \check{\mu}}(\gamma)xK$. On définit alors

$$\det(\check{\mathcal{M}})_K(\check{\bar{E}}) = \prod_{\delta \in d\mathbb{Z}} \mathcal{O}_F^\times/K \xrightarrow{\sim} F^\times/K = \check{\mathcal{M}}(D, \check{\mu})(\check{\bar{E}})$$

qui à $xK \in \mathcal{O}_F^\times/K$ dans la composante indexée par δ associe

$$p^{\delta/d}xK \in F^\times/K.$$

On vérifie immédiatement que cela est compatible à l'action de I_E , celle de $D(\mathbb{Q}_p) \times D(\mathbb{Q}_p)$ et aux morphismes \varkappa .

Pour montrer que l'isomorphisme est compatible à la donnée de descente de Rapoport-Zink, il suffit de montrer que l'isomorphisme canonique $\mathcal{L}_{\check{\mu}} \xrightarrow{\sim} \sigma_E^* \mathcal{L}_{\check{\mu}}$ correspond à l'identité $\mathcal{L}_{\check{\mu}, \bar{x}} \rightarrow \mathcal{L}_{\check{\mu}, \bar{x}}$ via le lemme 3.3.2 pour un point géométrique $\bar{x} : \text{Sp } \mathbb{C}_p \rightarrow \text{Sp } \check{E}$ et un relèvement $\tilde{\sigma}_E$ de σ_E comme dans la section 3.3.

Soient $\tau_0 : F \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ fixé, $\text{Gal}(F|\mathbb{Q}_p) = \langle \gamma \rangle$ et $p_i = p_{\tau_0 \gamma^i}$. Comme $E \subset \tau_0(F)$, on a un homomorphisme

$$\begin{aligned} \text{Gal}(F|\mathbb{Q}_p) &\rightarrow \text{Gal}(E|\mathbb{Q}_p) \\ \gamma^i &\mapsto \tau_0 \gamma^i \tau_0^{-1}. \end{aligned}$$

Posons

$$\mathcal{L}'_{\check{\mu}} := \prod_{i \in \mathbb{Z}/d'\mathbb{Z}} (\tau_0 \gamma^i \tau_0^{-1})^* T_p(H_{LT_E})^{\otimes p_i}$$

comme \mathcal{O}_E -système local étale sur $\text{Sp } E$. Alors l'action de $\text{Gal}(\bar{E}|E)$ sur la fibre au point géométrique $\text{Sp}(\mathbb{C}_p) \rightarrow \text{Sp}(E)$ qui correspond au corps plongé $E \subset \bar{E}$, est donnée par le caractère :

$$\prod_{i \in \mathbb{Z}/d'\mathbb{Z}} (\tau_0 \gamma^i \tau_0^{-1})^{-1} \chi_{LT_E}^{p_i} : \text{Gal}(\bar{E}|E) \rightarrow \mathcal{O}_E^\times.$$

Soit $\alpha_{\bar{x}} : E \rightarrow \check{E}$ tel que le morphisme composé

$$\text{Sp}(\mathbb{C}_p) \xrightarrow{\bar{x}} \text{Sp } \check{E} \xrightarrow{\alpha_{\bar{x}}} \text{Sp } E$$

correspond à l'inclusion $E \subset \bar{E}$. Alors

$$\alpha_{\bar{x}}^* \mathcal{L}'_{\check{\mu}} \otimes_{\mathcal{O}_E, \tau_0^{-1}} \mathcal{O}_F$$

est un \mathcal{O}_F -système local étale sur $\text{Sp } \check{E}$ avec l'action de I_E sur la fibre géométrique \bar{x} donnée par le caractère

$$\prod_{i \in \mathbb{Z}/d'\mathbb{Z}} \gamma^{-i} \circ \tau_0^{-1} \circ \chi_{LT_E}^{p_i} = \tau_0^{-1} \prod_{i \in \mathbb{Z}/d'\mathbb{Z}} (\tau_0 \gamma^i \tau_0^{-1})^{-1} \chi_{LT_E}^{p_i} : \text{Gal}(\bar{E}|E) \rightarrow \mathcal{O}_E^\times$$

D'après l'égalité 5, les deux \mathcal{O}_F -systèmes locaux $\alpha_{\bar{x}}^* \mathcal{L}'_{\check{\mu}} \otimes_{\mathcal{O}_E, \tau_0^{-1}} \mathcal{O}_F$ et $\mathcal{L}_{\check{\mu}}$ sur $\text{Sp } \check{E}$ sont isomorphes. On fixe un isomorphisme

$$(6) \quad \alpha_{\bar{x}}^* \mathcal{L}'_{\check{\mu}} \otimes_{\mathcal{O}_E, \tau_0^{-1}} \mathcal{O}_F \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{\check{\mu}},$$

alors l'isomorphisme $\mathcal{L}_{\bar{\mu}} \xrightarrow{\sim} \sigma_E^* \mathcal{L}_{\bar{\mu}}$ correspond à l'isomorphisme naturel

$$\alpha_{\bar{x}}^* \mathcal{L}'_{\bar{\mu}} \xrightarrow{\sim} \sigma_E^* \alpha_{\bar{x}}^* \mathcal{L}'_{\bar{\mu}}$$

Et ca ne dépend pas de l'isomorphisme 6 choisi. Donc cela revient à montrer que $\alpha_{\bar{x}}^* \mathcal{L}'_{\bar{\mu}} \xrightarrow{\sim} \sigma_E^* \alpha_{\bar{x}}^* \mathcal{L}'_{\bar{\mu}}$ correspond à l'identité $\mathcal{O}_E \rightarrow \mathcal{O}_E$ via le lemme 3.3.2 pour $\bar{\sigma}_E$ qui ne pose pas de problème grâce au choix de $\bar{\sigma}_E$. \square

4.4. Énoncé du théorème principal.

Théorème 4.4.1. *Via le morphisme $(\det, \det) : J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p) \rightarrow D(\mathbb{Q}_p) \times D(\mathbb{Q}_p)$ il existe un morphisme $J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant de tours d'espaces rigides*

$$(\check{\mathcal{M}}_K)_K \longrightarrow (\det(\check{\mathcal{M}}_K))_K$$

où K parcourt les sous-groupes ouverts de $G(\mathbb{Z}_p)$. Ce morphisme composé avec l'application canonique $\det(\check{\mathcal{M}})_{\det K} \rightarrow \Delta$ coïncide avec l'application $\varkappa : \check{\mathcal{M}}_K \rightarrow \Delta$. De plus, ce morphisme est compatible à la donnée de descente de Rapoport-Zink.

Ce théorème résulte du théorème plus général suivant.

Théorème 4.4.2. *Notons $f_K : \check{\mathcal{M}}_K \rightarrow \mathrm{Sp} \check{E}$ le morphisme structural. Soit \mathcal{T}_K le \mathcal{O}_F -système local étale sur $\check{\mathcal{M}}_K$ qui est le module de Tate de la déformation universelle.*

Pour tous K , il existe un isomorphisme de \mathcal{O}_F -systèmes locaux étales

$$u_K : \det_{\mathcal{O}_F} \mathcal{T}_K \xrightarrow{\sim} f_K^* \mathcal{L}_{\bar{\mu}}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

- (1) *Si $K' \subset K$, via le morphisme de changement de niveau $\pi_{K',K} : \check{\mathcal{M}}_{K'} \rightarrow \check{\mathcal{M}}_K$ et l'identification canonique $\pi_{K',K}^* \mathcal{T}_K = \mathcal{T}_{K'}$ on a*

$$\pi_{K',K}^* u_K = u_{K'}.$$

- (2) *Si $g \in J(\mathbb{Q}_p)$, qui définit l'automorphisme $g : \check{\mathcal{M}}_K \xrightarrow{\sim} \check{\mathcal{M}}_K$, via l'identification canonique $g^* \mathcal{T}_K = \mathcal{T}_K$ l'isomorphisme*

$$\det \mathcal{T}_K = g^* \det \mathcal{T}_K \xrightarrow{g^* u_K} g^* f_K^* \mathcal{L}_{\bar{\mu}} = f_K^* \mathcal{L}_{\bar{\mu}}$$

est égal à

$$(p^{-v_p(\det g)} \det(g)) u_K.$$

- (3) *Si $g \in G(\mathbb{Q}_p)$ est tel que $g^{-1}Kg \subset \mathrm{Aut}(\Lambda_0)$ et $\Lambda_0 \subset g \cdot \Lambda_0$, si $g : \check{\mathcal{M}}_K \xrightarrow{\sim} \check{\mathcal{M}}_{g^{-1}Kg}$, via le morphisme canonique*

$$\mathcal{T}_K \longrightarrow g^* \mathcal{T}_{g^{-1}Kg},$$

le morphisme composé

$$\det \mathcal{T}_K \longrightarrow g^* \det \mathcal{T}_{g^{-1}Kg} \xrightarrow{g^* u_{g^{-1}Kg}} g^* f_{g^{-1}Kg}^* \mathcal{L}_{\bar{\mu}} = f_K^* \mathcal{L}_{\bar{\mu}}$$

est égal à

$$p^{-v_p(\det g)} u_K.$$

- (4) *Soit $\alpha : \check{\mathcal{M}}_K \rightarrow \sigma_E^* \check{\mathcal{M}}_K$ la donnée de descente de Rapoport-Zink. Via les isomorphismes canoniques*

$$\mathcal{T}_K = \alpha^* \sigma_E^* \mathcal{T}_K \text{ et } \sigma_E^* \mathcal{L}_{\bar{\mu}} = \mathcal{L}_{\bar{\mu}},$$

le morphisme composé

$$\det \mathcal{T}_K = \alpha^* \sigma_E^* \det \mathcal{T}_K \xrightarrow{\alpha^* \sigma_E^* u_K} \alpha^* \sigma_E^* f_K^* \mathcal{L}_{\bar{\mu}} = f_K^* \sigma_E^* \mathcal{L}_{\bar{\mu}} = f_K^* \mathcal{L}_{\bar{\mu}}$$

est égal à u_K .

L'isomorphisme u_K que nous contruisons n'est pas tout à fait naturel. L'isomorphisme naturel est plutôt $p^{\varkappa/d} u_K$ qui n'est plus un isomorphisme de \mathcal{O}_F -systèmes locaux au sens de la définition 2.6.2 mais de \mathbb{Q}_p -systèmes locaux munis d'une action de F au sens de de Jong ([dJ95b]). On renvoie à la section 6 pour plus de détails.

4.5. Rappels de la théorie de Fontaine. Oublions momentanément les notations de la section précédente. Soit $K|\mathbb{Q}_p$ un corps valué complet pour une valuation discrète, à corps résiduel k parfait de caractéristique $p > 0$. On note $K_0 = W(k)[1/p]$. On suppose que k contient un corps fini de degré d et on note $\mathbb{F}_q = k^{\text{Frob}^d = \text{Id}}$, $F = W(\mathbb{F}_q)_{\mathbb{Q}} \subset K_0$. Soit \bar{K} une clôture algébrique de K . On note $G_K = \text{Gal}(\bar{K}/K)$.

Soit

$$\chi_{LT} : G_K \longrightarrow \mathcal{O}_F^\times$$

le caractère de Lubin-Tate donnant l'action de G_K sur le module de Tate d'un groupe formel p -divisible H_{LT} de dimension 1 et de hauteur d sur \mathcal{O}_F , muni d'une action de \mathcal{O}_F telle que l'action induite sur son algèbre de Lie soit l'action tautologique.

Soit σ le Frobenius de K_0 . Soient $S = \text{Spf}(\mathcal{O}_{K_0})$ et $(M, \varphi, \text{Fil } M)$ le φ -module filtré associé à $H_{LT} \otimes \mathcal{O}_{K_0}$ où

- $M = \text{Lie } E(H_{LT} \otimes \mathcal{O}_{K_0})$ l'algèbre de Lie de l'extension vectorielle universelle de $H_{LT} \otimes \mathcal{O}_{K_0}$,
- $\varphi : M \rightarrow M$ est σ -linéaire induit par le Verschiebung,
- $\text{Fil } M = \text{Lie}((H_{LT} \otimes \mathcal{O}_{K_0})^\vee)^*$ la partie vectorielle de l'extension vectorielle universelle de $H_{LT} \otimes \mathcal{O}_{K_0}$ (cf. [Mes72]).

On a alors :

- Le module de Dieudonné est

$$M = \mathcal{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{K_0} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{K_0}$$

où \mathcal{O}_F agit sur le facteur indexé par $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ via σ^i . Notons $(e_i)_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}$ la base canonique du module de droite.

- Le Frobenius φ est donné par

$$\varphi(x_0, \dots, x_{d-1}) = (p\sigma(x_{d-1}), \sigma(x_0), p\sigma(x_1), p\sigma(x_2), \dots, p\sigma(x_{d-2})).$$

c'est à dire

$$\varphi(e_j) = \begin{cases} pe_{j+1} & \text{si } j \neq 0 \\ e_1 & \text{si } j = 0. \end{cases}$$

- La filtration de Hodge est

$$\text{Fil } M = \langle e_1, \dots, e_{d-1} \rangle.$$

Soit $A_{cris} := A_{cris}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ et $\theta : A_{cris} \rightarrow \mathcal{O}_{\widehat{K}}$ l'épaississement défini comme dans ([Che] paragraphe après la définition 2.5). On a

$$\begin{aligned} \text{Fil}^0(M \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} A_{cris}) &:= \{x \in M \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} A_{cris} \mid \theta(x) \in \text{Fil } M \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \mathcal{O}_{\widehat{K}}\} \\ &= \text{Fil}^1 A_{cris} e_0 \oplus A_{cris} e_1 \oplus \dots \oplus A_{cris} e_{d-1}. \end{aligned}$$

où on désigne aussi par θ la projection $M \otimes A_{cris} \rightarrow M \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}}$ induite par θ et

$$\begin{aligned} \{x \in A_{cris}^{\varphi^d=p} \mid \varphi(x) \in pA_{cris}\} &\xrightarrow{\sim} (M \otimes A_{cris})^{\varphi=p} \\ x &\longmapsto (x, p^{-1}\varphi(x), p^{-1}\varphi^2(x), \dots, p^{-1}\varphi^{d-1}(x)). \end{aligned}$$

On a donc d'après ([Che], corollaire 4.3)

$$T_p(H_{LT}) = \text{Fil}^0(M \otimes A_{cris})^{\varphi=p} = \{x \in \text{Fil}^1 A_{cris}^{\varphi^d=p} \mid \varphi(x) \in pA_{cris}\}$$

qui est un \mathcal{O}_F -module libre de rang 1 via le plongement canonique $\mathcal{O}_F \subset A_{cris}$. Notons

$$t_{LT} \in \text{Fil}^1 A_{cris}^{\varphi^d=p}$$

un générateur de $T_p(H_{LT})$. On a donc

$$\forall \tau \in G_K, \quad \tau(t_{LT}) = \chi_{LT}(\tau) \cdot t_{LT}.$$

Bien sûr lorsque $d = 1$, $t_{LT} = t$ à une unité dans \mathbb{Z}_p^\times près. On a après inversion de p et t ,

$$F \cdot t_{LT} = \text{Fil}^1 B_{cris}(\mathcal{O}_{\bar{K}})^{\varphi^d=p}.$$

Considérons maintenant pour $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, $H_{LT}^{(\sigma^i)}$ le groupe p -divisible sur \mathcal{O}_F muni d'une action de \mathcal{O}_F obtenu par torsion de H_{LT} via σ^i . L'action de G_K sur $T_p(H_{LT}^{(\sigma^i)})$ est donnée par

$$\sigma^{-i} \circ \chi_{LT} : G_K \longrightarrow \mathcal{O}_F^\times.$$

Son module de Dieudonné filtré est obtenu par torsion du précédent. Si $(M_i, \varphi, \text{Fil } M_i)$ est ce φ -module filtré on a :

- Son module de Dieudonné est

$$M_i = \langle e_{i,0}, \dots, e_{i,d-1} \rangle$$

où \mathcal{O}_F agit sur $K_0 e_{i,j}$ via σ^j .

- Le Frobenius φ est donné par

$$\varphi(e_{i,j}) = \begin{cases} p e_{i,j+1} & \text{si } j \neq i \\ e_{i,j+1} & \text{si } j = i. \end{cases}$$

- Sa filtration de Hodge est

$$\text{Fil } M_i = \langle e_{i,j} \rangle_{j \neq i}.$$

On a alors

$$\text{Fil}^0(M_i \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} A_{cris}) = \bigoplus_{j=0}^{d-1} \text{Fil}^{\delta_{i,j}} A_{cris}.$$

et

$$\begin{aligned} B_{cris}^{\varphi^d=p} &\xrightarrow{\sim} (M_i \otimes B_{cris})^{\varphi=p} \\ x &\longmapsto \sum_{j=0}^i \varphi^j(x) e_{ij} + \frac{1}{p} \sum_{j=i+1}^{d-1} \varphi^j(x) e_{ij}. \end{aligned}$$

On a donc

$$V_p(H_{LT}^{(\sigma^i)}) = \{x \in B_{cris}^{\varphi^d=p} \mid \varphi^i(x) \in \text{Fil}^1 B_{cris}\}.$$

L'élément $\varphi^{d-i}(t_{LT})$ est dans ce F -espace vectoriel de dimension 1. On a donc

$$\{x \in B_{cris}^{\varphi^d=p} \mid \varphi^i(x) \in \text{Fil}^1 B_{cris}\} = F \cdot \varphi^{d-i}(t_{LT}).$$

Rappelons que l'on a une équivalence de catégories de Fontaine entre φ -modules filtrés admissibles associés à K/K_0 et représentations cristallines de G_K . Par φ -module filtré on entend un triplet $(N, \varphi, \text{Fil}^\bullet N_H)$ où

- N un K_0 -espace vectoriel de dimension finie,
- $\varphi : N \xrightarrow{\sim} N$ un isomorphisme σ -linéaire,
- $\text{Fil}^\bullet N_K$ une filtration décroissante finie de $N \otimes_{K_0} K$.

Le foncteur V_{cris} donnant l'équivalence est alors donné par

$$V_{cris}(N, \varphi, \text{Fil}^\bullet N) = \text{Fil}^0(N \otimes_{K_0} B_{cris})^{\varphi=\text{Id}}.$$

Cette équivalence est compatible au produit tensoriel :

$$V_{cris}(N_0, \varphi_1, \text{Fil}^\bullet N_{1,K}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_{cris}(N_1, \varphi_2, \text{Fil}^\bullet N_{2,K}) \xrightarrow{\sim} V_{cris}(N_1 \otimes N_2, \varphi \otimes \varphi, \text{Fil}^\bullet(N_{1,K} \otimes N_{2,K})).$$

L'équivalence précédente induit une équivalence entre φ -modules filtrés admissibles munis d'une action de F et représentations cristallines à coefficients dans un F -espace vectoriel. Considérons la surjection canonique $F \otimes_{\mathbb{Q}_p} F \rightarrow F$. Il y a un idempotent $e \in F \otimes_{\mathbb{Q}_p} F$ tel que via la surjection précédente $e.(F \otimes_{\mathbb{Q}_p} F) \xrightarrow{\sim} F$. Si V_1 et V_2 sont deux F -espaces vectoriels on a alors

$$e.(V_1 \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_2) = V_1 \otimes_F V_2.$$

Si $\underline{N}_i = (N_i, \varphi_i, \text{Fil}^\bullet N_{i,K})$, $i \in \{1, 2\}$, sont deux φ -modules filtrés admissibles munis d'une action de F on a donc

$$\begin{aligned} V_{cris}(\underline{N}_1) \otimes_F V_{cris}(\underline{N}_2) &= e.V_{cris}(\underline{N}_1 \otimes \underline{N}_2) \\ &= V_{cris}(e.(\underline{N}_1 \otimes \underline{N}_2)). \end{aligned}$$

Mais le φ -module filtré $e.(N_1 \otimes N_2)$, facteur direct de $N_1 \otimes N_2$, est donné par

$$(N_1 \otimes_{F \otimes_{\mathbb{Q}_p} K_0} N_2, \varphi \otimes \varphi, \text{Fil}^\bullet(N_{1,K} \otimes_{F \otimes_{\mathbb{Q}_p} K} N_{2,K})).$$

On a donc

$$V_{\text{cris}}(N_1) \otimes_F V_{\text{cris}}(N_2) = V_{\text{cris}}(N_1 \otimes_{F \otimes_{\mathbb{Q}_p} K_0} N_2, \varphi \otimes \varphi, \text{Fil}^\bullet(N_{1,K} \otimes_{F \otimes_{\mathbb{Q}_p} K} N_{2,K})).$$

Proposition 4.5.1. *Soit $(p_i)_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}$ une collection d'entiers positifs et $a = \sum_i p_i$. Le F -espace vectoriel*

$$M(K, \{p_i\}) := \{x \in B_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K}})^{\varphi^d = p^a} \mid \forall i, 0 \leq i < d, \varphi^i(x) \in \text{Fil}^{p_i} B_{\text{cris}}\}$$

est de dimension 1 de base

$$\prod_{i=0}^{d-1} \varphi^{d-i}(t_{LT})^{p_i}.$$

Le groupe de Galois G_K agit sur cet espace vectoriel par le caractère

$$\prod_{i=0}^{d-1} \sigma^{-i} \circ \chi_{LT}^{p_i} : G_K \longrightarrow \mathcal{O}_F^\times.$$

Démonstration. Pour $i \in \{0, \dots, d-1\}$, posons $N_i = M_i[\frac{1}{p}]$. Le φ -module filtré

$$(N_i, p^{-1}\varphi, \text{Fil}^\bullet N_i)$$

est admissible muni d'une action de F , où on rappelle que l'on pose $\text{Fil}^{-1} N_i = N_i$, $\text{Fil}^0 N_i = \text{Fil} N_i$ et $\text{Fil}^1 N_i = 0$. Soit

$$N = \bigotimes_{0 \leq i < d} N_i^{\otimes p_i}$$

où les produits tensoriel sont pris au dessus de $F \otimes_{\mathbb{Q}_p} K_0$. Notons

$$\epsilon_j = e_{0,j}^{\otimes p_0} \otimes \dots \otimes e_{d-1,j}^{\otimes p_{d-1}} \in N.$$

Alors, $(\epsilon_0, \dots, \epsilon_{d-1})$ est une base de N comme K_0 -espace vectoriel et F agit sur ϵ_j via σ^j . La structure de φ -module filtré de N est donnée par :

– le Frobenius $p^{-1}\varphi \otimes \dots \otimes p^{-1}\varphi$ est donné par

$$\varphi(\epsilon_j) = p^{-p_j} \epsilon_{j+1},$$

– la filtration est

$$\text{Fil}^k N = \langle \epsilon_j \rangle_{p_j \leq -k}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} B_{\text{cris}}^{\varphi^d = p^a} &\xrightarrow{\sim} (N \otimes_{K_0} B_{\text{cris}})^{\varphi = \text{Id}} \\ x &\longmapsto \sum_{j=0}^{d-1} p^{-\sum_{0 \leq k < j} p_k} \varphi^j(x) \epsilon_j \end{aligned}$$

et

$$\text{Fil}^0(N \otimes_{K_0} B_{\text{cris}}) = \bigoplus_{0 \leq j < d} \text{Fil}^{p_j} B_{\text{cris}}.$$

Le résultat se déduit alors de l'isomorphisme

$$\bigotimes_{0 \leq i < d} V_{\text{cris}}(N_i, p^{-1}\varphi, \text{Fil}^\bullet N_i)^{\otimes p_i} \xrightarrow{\sim} V_{\text{cris}}(N, \varphi, \text{Fil}^\bullet N).$$

où les produits tensoriels sont pris au dessus de F . □

Remarque 4.5.1. *L'inclusion $B_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{F}}) \subset B_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ induit une inclusion*

$$M(F, \{p_i\}) \subset M(K, \{p_i\}).$$

En appliquant la proposition 4.5.1 pour $K = F$, on en déduit que c'est une identification. Donc on a une action de G_F sur $M(K, \{p_i\})$ et le caractère $\prod_{i=0}^{d-1} \sigma^{-i} \circ \chi_{LT}^{p_i} : G_K \longrightarrow \mathcal{O}_F^\times$ factorise via $G_F \longrightarrow \mathcal{O}_F^\times$ qu'on note encore $\prod_{i=0}^{d-1} \sigma^{-i} \circ \chi_{LT}^{p_i}$ par l'abus de notation.

Proposition 4.5.2. Soient $d'|d$ et $E = \mathbb{Q}_{p^{d'}}$. Soit $(p_i)_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}$ une collection d'entiers positifs telle que $p_i = p_j$ pour $i \equiv j \pmod{d'}$. Posons $a' = \frac{d'}{d} \sum_i p_i$. Alors

$$\{x \in B_{cris}(\mathcal{O}_{\overline{K}})^{\varphi^{d'}=p^{a'}} \mid \forall i, 0 \leq i < d', \varphi^i(x) \in \text{Fil}^{p_i} B_{cris}\} \subset M(K, \{p_i\})$$

est un sous- E -espace vectoriel de dimension 1 de base

$$\prod_{i=0}^{d'-1} \varphi^{d'-i}(t_{LT_E})^{p_i}.$$

De plus,

$$\prod_{i=0}^{d-1} \varphi^{d-i}(t_{LT})^{p_i} = \prod_{i=0}^{d'-1} \varphi^{d'-i}(t_{LT_E})^{p_i}$$

à unité dans E^\times près.

L'action de G_E sur $B_{cris}(\mathcal{O}_{\overline{E}}) = B_{cris}(\mathcal{O}_{\overline{F}})$ induit une action de G_E sur $M(K, \{p_i\})$ telle que sur le sous E -espace vectoriel $E \cdot \prod_{i=0}^{d'-1} \varphi^{d'-i}(t_{LT_E})^{p_i}$, l'action de G_E est donné par le caractère

$$\prod_{i=0}^{d'-1} \sigma^{-i} \circ \chi_{LT_E}^{p_i} : G_E \rightarrow \mathcal{O}_E^\times.$$

Démonstration. La première assertion est due à la proposition 4.5.1. D'après les discussions dans cette section,

$$V_p(H_{LT_E}) = \text{Fil}^1 B_{cris}(\mathcal{O}_{\overline{E}})^{\varphi^{d'}=p}$$

est un E -module libre de rang 1 de base t_{LT_E} . On vérifie aisément que

$$\prod_{i=0}^{d/d'-1} \varphi^{d'i}(t_{LT}) \in V_p(H_{LT_E}).$$

Donc

$$\prod_{i=0}^{d/d'-1} \varphi^{d'i}(t_{LT}) = t_{LT_E}$$

à unité dans E^\times près. On a alors

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^{d-1} \varphi^{d-i}(t_{LT})^{p_i} &= \prod_{j=0}^{d/d'-1} \prod_{i=0}^{d'-1} \varphi^{d-(d'j+i)}(t_{LT})^{p_i} \\ &= \prod_{i=0}^{d'-1} \varphi^{d'-i} \left(\prod_{j=0}^{d/d'-1} \varphi^{d-d'-d'j}(t_{LT}) \right)^{p_i} \\ &= \prod_{i=0}^{d'-1} \varphi^{d'-i}(t_{LT_E})^{p_i} \end{aligned}$$

à unité dans E^\times près. On en déduit l'action de G_E sur $E \cdot \prod_{i=0}^{d'-1} \varphi^{d'-i}(t_{LT_E})^{p_i}$ désiré car G_E agit sur $E \cdot t_{LT_E}$ via le caractère χ_{LT_E} . \square

4.6. Rappel d'un résultat de Faltings sur le déterminant des périodes cristallines. Soit $K|\mathbb{Q}_p$ un corps valué complet de valuation discrète à corps résiduel algébriquement clos k et $K_0 = W(k)_\mathbb{Q}$. Fixons une clôture algébrique \overline{K} de K . Soit H un groupe p -divisible sur \mathcal{O}_K de dimension d et de hauteur n . Notons (M, φ) le module de Dieudonné entier covariant de la réduction de H sur k où M est un \mathcal{O}_{K_0} -module libre de rang la hauteur de H . Considérons l'isomorphisme de périodes (cf. [Che] corollaire 4.2)

$$V_p(H) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris} \xrightarrow{\sim} M\left[\frac{1}{p}\right] \otimes_{K_0} B_{cris}$$

où $B_{cris} := B_{cris}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$. Fixons des bases de $V_p(H)$ et de $M[\frac{1}{p}]$ telles que via la base choisie de $M[\frac{1}{p}]$,

$$(\wedge_{K_0}^n M[\frac{1}{p}], \varphi) \xrightarrow{\sim} (K_0, p^{n-d}\sigma).$$

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(B_{cris})$ la matrice de l'application de périodes précédente. La compatibilité aux filtrations et au Frobenius de l'isomorphisme de périodes impose que

$$\det A \in \mathrm{Fil}^d B_{cris}^{\varphi=p^d} = \mathbb{Q}_p t^d$$

et donc $\det(A) \in \mathbb{Q}_p^\times t^d$.

Proposition 4.6.1 (Faltings, [Fal02] lemme 1). *Si l'on choisit des bases entières données par des bases de $T_p(H)$ et M telles que via la base choisie de M , $(\wedge_{\mathcal{O}_K}^n M, \varphi) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_{K_0}, p^{n-d}\sigma)$. Alors le déterminant de la matrice de périodes associée $\det(A)$ est dans $\mathbb{Z}_p^\times t^d$.*

On renvoie également à [Far08], théorème C.2.6 p.122 pour plus de détails sur la preuve de Faltings.

4.7. Preuve du théorème 4.4.2 et du théorème 4.4.1.

4.7.1. *Préliminaires.* Afin de construire l'isomorphisme on fixe dès le début un relèvement $\tilde{\mathbb{X}} \in \check{\mathcal{M}}(\mathcal{O}_{\tilde{E}})$ de \mathbb{X} . On note \mathcal{T} le \mathcal{O}_F -système local étale sur $\check{\mathcal{M}}^{rig}$ qui est le module de Tate de la déformation universelle. Pour simplifier, on note encore $\mathcal{L}_{\tilde{\mu}}$ pour le \mathbb{Z}_p -faisceau sur $\check{\mathcal{M}}^{rig}$ qui est le tiré en arrière du système local $\mathcal{L}_{\tilde{\mu}}$ sur $\mathrm{Sp} \tilde{E}$. On va commencer par construire un isomorphisme

$$u : \det_{\mathcal{O}_F} \mathcal{T} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{\tilde{\mu}}.$$

satisfaisant la relation d'équivariance relativement à l'action de $J(\mathbb{Q}_p)$ pour $K = \mathrm{Aut}(\Lambda_0)$ annoncée dans le point (2) du théorème 4.4.2. On posera ensuite pour $K \subset \mathrm{Aut}(\Lambda_0)$, si $\pi_K : \check{\mathcal{M}}_K \rightarrow \check{\mathcal{M}}^{rig}$,

$$u_K = \pi_K^* u.$$

Il restera alors à vérifier que les $(u_K)_K$ satisfont à la relation d'équivariance du point (3) du théorème 4.4.2 relativement à l'action de $G(\mathbb{Q}_p)$.

Soit $(\mathbb{D}(\mathbb{X}), \varphi)$ le module de Dieudonné covariant de \mathbb{X} et $\mathrm{Fil} \mathbb{D}(\mathbb{X})$ la filtration déduite du relèvement $\tilde{\mathbb{X}}$ (on utilise les normalisation du chapitre 1 concernant le Frobenius φ et cette filtration). Par définition, $\mathbb{D}(\mathbb{X})$ est l'évaluation du cristal de Dieudonné covariant de \mathbb{X} sur l'épaississement $W \xrightarrow{\mathrm{Id}} W$ et φ est induit par le Verschiebung de la réduction modulo p de \mathbb{X} . Soit

$$(\det_{\mathcal{O}_F \otimes W} \mathbb{D}(X), \varphi, \mathrm{Fil}^\bullet \det_{\mathcal{O}_F} \mathbb{D}(X))$$

le φ -module filtré associé où le déterminant est pris au dessus de $\mathcal{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}_p} W$.

Lemme 4.7.1. *Il existe une base $(\epsilon_\tau)_{\tau \in \tilde{I}_F}$ de $\det_{\mathcal{O}_F \otimes W} \mathbb{D}(\mathbb{X})[\frac{1}{p}]$ pour laquelle*

- F agit sur $L \cdot \epsilon_\tau$ via $\tau : \mathcal{O}_F \hookrightarrow \mathcal{O}_L$,
- $\varphi(\epsilon_\tau) = p^{q_\tau} \epsilon_{\sigma\tau}$
- $\mathrm{Fil}^k \mathbb{D}(\mathbb{X})[\frac{1}{p}] = \langle \epsilon_\tau \rangle_{p_\tau \leq -k}$.

Démonstration. L'isocristal filtré muni de son action de F , $\det_{\mathcal{O}_F \otimes W} \mathbb{D}(\mathbb{X})[\frac{1}{p}]$, est donné par le couple $(\det \bar{b}, \det \tilde{\mu})$ où $\det \bar{b} \in B(D)$ et $\det \tilde{\mu} \in X_*(D)$. Puisque $\overline{p^{-1}\bar{b}} \in B(G, \tilde{\mu})$, on a

$$\det(\overline{p^{-1}\bar{b}}) \in B(D, \tilde{\mu}).$$

Ainsi, d'après la remarque 3.1.1, $\det \tilde{\mu}$ détermine complètement $\det(\overline{p^{-1}\bar{b}}) = \overline{p^{-n} \det \bar{b}} \in B(D)$. Il suffit alors de constater que le Frobenius donné dans l'énoncé multiplié par p^{-n} est bien l'élément associé à $\det \tilde{\mu}$ dans $X_*(D)_\Gamma$. □

Définition 4.7.1. *On note $T := \det_{\mathcal{O}_F} T_p(\tilde{\mathbb{X}})$.*

Puisque

$$V_p(\tilde{\mathbb{X}}) = \text{Fil}^0(\mathbb{D}(\mathbb{X}) \otimes_W B_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{\tilde{E}})) \varphi=p,$$

on a

$$\det_F V_p(\tilde{\mathbb{X}}) \subset \text{Fil}^0(\det_{\mathcal{O}_F \otimes W} \mathbb{D}(\mathbb{X}) \otimes_W B_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{\tilde{E}})) \varphi=p^n.$$

Proposition 4.7.1. *L'action de I_E sur T est donnée par le caractère*

$$\prod_{\tau \in \tilde{I}_F} \chi_{LT, \tau}^{p\tau}.$$

Démonstration. Donnons deux démonstrations de cette proposition. Tout d'abord la première consiste à utiliser la formule donnée dans le lemme 4.7.1. En effet,

$$\det_F V_p(\tilde{\mathbb{X}}) = \text{Fil}^0(\det_{\mathcal{O}_F \otimes W} \mathbb{D}(\mathbb{X}) \otimes_W B_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{\tilde{E}})) \varphi=p^n$$

s'identifie grâce au lemme 4.7.1, après choix d'un plongement de F dans \tilde{E} , au module galoisien de la proposition 4.5.1.

Une preuve plus conceptuelle est la suivante. Après choix d'un scindage de la filtration de Hodge de $\mathbb{D}(\tilde{\mathbb{X}})_{[p]}^1$, celle-ci est donnée par un cocaractère μ' à valeurs dans G_L conjugué à $\tilde{\mu}$ dans $G_{\mathbb{Q}_p}$. Le couple $(p^{-1}b, \mu')$ est admissible et donne lieu à un foncteur

$$\mathcal{F}_{p^{-1}b, \mu'} : \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p} G \longrightarrow \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{cris}} I_E$$

(cf. [RZ96] 1.19). De plus si $V = F$ et $\rho : G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{Q}_p}(V)$ est la représentation \det_F , on a

$$\det_F V_p(\tilde{\mathbb{X}}) = \mathcal{F}_{p^{-1}b, \mu'}(V, \rho).$$

Mais,

$$\mathcal{F}_{p^{-1}b, \mu'}(V, \rho) = \mathcal{F}_{\det(p^{-1}b), \det \mu'}(V, \rho')$$

où $\rho' \in \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(D)$ est la représentation canonique $D \hookrightarrow \text{GL}_{\mathbb{Q}_p}(V)$, $\det : G \rightarrow D$. Puisque $\mu' \sim \tilde{\mu}$, $\det \mu' = \det \tilde{\mu}$. D'après le lemme 3.4.1, I_E agit donc sur $\det_F(V_p \tilde{\mathbb{X}})$ via $\chi_{\det \tilde{\mu}}$. On conclut en utilisant le lemme 4.3.1 qui affirme que

$$\chi_{\det \tilde{\mu}} = \prod_{\tau \in \tilde{I}_F} \chi_{LT, \tau}^{p\tau}.$$

□

On fixe désormais un isomorphisme entre la fibre de $\mathcal{L}_{\tilde{\mu}}$ au point géométrique $\text{Spec}(\overline{\tilde{E}}) \rightarrow \text{Spec}(\tilde{E})$ et T .

4.7.2. *Dévisage au cas affine « adapté ».*

Définition 4.7.2. *Un triplet adapté est un triplet (S, X, ρ) où :*

- $S = \text{Spf}(R)$ est un schéma formel affine,
- R est une $\mathcal{O}_{\tilde{E}}$ -algèbre topologiquement de type fini sans p -torsion intègre normale,
- $(X, \rho) \in \check{\mathcal{M}}(S)$,
- $\text{Lie } X$ et $\text{Lie } X^\vee$ sont des R -modules libres,
- le morphisme $S \rightarrow \check{\mathcal{M}}$ induit une immersion ouverte $S^{\text{rig}} \hookrightarrow \check{\mathcal{M}}^{\text{rig}}$.

Si (S, X, ρ) est un triplet adapté on note

$$T_p(X) = (X[p^m]^{\text{rig}})_{m \geq 1}$$

comme \mathcal{O}_F -système local étale sur S^{rig} .

Proposition 4.7.2. *Pour se donner un isomorphisme $\det_{\mathcal{O}_F} \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{\tilde{\mu}}$ il suffit de se donner pour tout triplet adapté $x = (S, X, \rho)$ un isomorphisme*

$$u_x : \det_{\mathcal{O}_F} T_p(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{\tilde{\mu}}$$

vérifiant : si $x' = (S', X', \rho')$ est un autre triplet adapté et $f : S' \rightarrow S$ est tel que $f^(X, \rho) = (X', \rho')$ alors $f^* u_x = u_{x'}$.*

Démonstration. Soit U un ouvert quasicompact connexe de $\check{\mathcal{M}}^{rig}$. Soit \mathcal{U} un modèle topologiquement de type fini dans p -torsion sur \mathcal{O}_K de U , $\mathcal{U}^{rig} = U$. Après un éclatement formel admissible au sens de Raynaud on peut supposer que l'inclusion $U \subset \check{\mathcal{X}}^{rig}$ soit donnée par un morphisme $\mathcal{U} \rightarrow \check{\mathcal{M}}$. Soit $\mathcal{U} = \bigcup_i \mathcal{U}_i$ un recouvrement affine fini de \mathcal{U} sur lequel $\text{Lie } X$ et $\text{Lie } X^\vee$ sont libres. Notons $\mathcal{U}_i = \text{Spf}(R_i)$. Puisque $\check{\mathcal{M}}^{rig}$ est lisse, $R_i[\frac{1}{p}]$ est normale. Quitte à remplacer R_i par son normalisé dans $R_i[\frac{1}{p}]$ on peut supposer R_i normale (d'après [BGR84], 6.4.1, ce normalisé est encore topologiquement de type fini). Alors,

$$\pi_0(\text{Spf}(R_i)) \xrightarrow{\sim} \pi_0(\text{Sp}(R_i[\frac{1}{p}])).$$

On peut donc trouver une famille de morphismes

$$(\mathcal{U}_{ij} \longrightarrow \mathcal{U}_i)_j$$

avec $\mathcal{U}_{ij} = \text{Spf}(R_{ij})$, R_{ij} intègre normale et induisant un recouvrement admissible

$$\mathcal{U}_i^{rig} = \bigcup_j \mathcal{U}_{ij}^{rig}.$$

On a donc une famille de morphismes

$$(\mathcal{U}_{ij} \longrightarrow \mathcal{U})_{i,j}$$

induisant un recouvrement admissible en fibre générique et telle que pour tout i, j , le morphisme $\mathcal{U}_{ij} \rightarrow \check{\mathcal{M}}$ définisse un triplet adapté.

Soient maintenant $\mathcal{U} \rightarrow \check{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{V} \rightarrow \check{\mathcal{M}}$ deux $\check{\mathcal{M}}$ -schémas formels affines définissant des triplets adaptés et tels que $\mathcal{U}^{rig} \subset \mathcal{V}^{rig} \subset \check{\mathcal{M}}^{rig}$. D'après Raynaud, quitte à effectuer un éclatement formel admissible de $\check{\mathcal{U}}$ de \mathcal{U} , l'inclusion

$$\check{\mathcal{U}}^{rig} = \mathcal{U}^{rig} \subset \mathcal{V}^{rig}$$

est donnée par un morphisme $\check{\mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{V}$. On peut appliquer la procédure précédente à $\check{\mathcal{U}}$ afin de trouver une famille de morphismes

$$(\check{\mathcal{U}}_k \rightarrow \check{\mathcal{U}})_k$$

induisant un recouvrement admissible en fibre générique et tel que pour tout k , le morphisme $\check{\mathcal{U}}_k \rightarrow \check{\mathcal{M}}$ définisse un triplet adapté. À partir de ces constatations il est aisé de conclure. \square

4.7.3. Construction de l'isomorphisme. Soit $(\text{Spf } R, X, \rho)$ un triplet adapté. Fixons une clôture algébrique $\overline{\text{Frac}}(\overline{R})$ de $\text{Frac}(R)$ contenant \overline{E} . L'anneau R satisfait les hypothèses sur la base du théorème de comparaison comme on a rappelé dans l'introduction. Soit $\overline{R} \subset \overline{\text{Frac}}(\overline{R})$ comme dans cette section. On a

$$\mathcal{O}_{\overline{E}} \subset \overline{R}.$$

On va pouvoir appliquer le théorème de comparaison. Avant toute chose rappelons qu'il existe une équivalence entre la catégorie des $\text{Spec}(R[\frac{1}{p}])$ -schémas étales finis et celle des $\text{Sp}(R[\frac{1}{p}])$ -espaces rigides étales finis. Cette équivalence est tout simplement donnée par $\text{Spec}(\mathcal{A}) \mapsto \text{Sp}(\mathcal{A})$. Le groupe de Galois $\Gamma = \text{Aut}(\overline{R}/R)$ s'identifie donc au groupe fondamental de l'espace rigide $\text{Sp}(R[\frac{1}{p}])$ (par groupe fondamental on entend ici celui classifiant les revêtements étales finis). Le faisceau étale $T_p(X)$ s'incarne alors en un $\mathbb{Z}_p[\Gamma]$ -module que l'on note encore $T_p(X)$.

Lemme 4.7.2. *Notons $\mathbb{D}(X)$ le cristal covariant de X sur $\text{NCRIS}(S/\Sigma)$. La quasi-isogénie ρ induit un isomorphisme compatible aux actions de F*

$$(\mathbb{D}(\mathbb{X}) \otimes_W B_{cris}^+(\overline{R}), \varphi_{\mathbb{X}} \otimes \varphi) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{D}(X)_{A_{cris}(\overline{R}) \rightarrow \widehat{\overline{R}}}[1/p], \varphi_X)$$

où φ_X est le morphisme semi-linéaire sur $\mathbb{D}(X)_{A_{cris}(\overline{R}) \rightarrow \widehat{\overline{R}}}$ induit par le Verschiebung de la réduction modulo p de X et où $\varphi_{\mathbb{X}}$ est le même pour $\mathbb{D}(\mathbb{X})$. De plus, il est compatible à l'action de $\Gamma = \text{Gal}(\overline{R}/R)$, où l'action de $\text{Gal}(\overline{R}/R)$ sur $\mathbb{D}(\mathbb{X}) \otimes_W B_{cris}^+(\overline{R})$ est induite par celle sur $B_{cris}^+(\overline{R})$.

Démonstration. On considère le morphisme d'épaississements à puissances divisées nilpotentes dans la catégorie $\text{NCRIS}(S/\Sigma)$:

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } \overline{R}/p\overline{R} & \hookrightarrow & \text{Spf } A_{\text{cris}}(\overline{R}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } (\overline{\mathbb{F}}_p) & \hookrightarrow & \text{Spf } W. \end{array}$$

D'après la propriété de cristal, l'évaluation du cristal de \mathbb{X} sur l'épaississement $\text{Spec}(\overline{R}/p\overline{R}) \hookrightarrow \text{Spf } A_{\text{cris}}(\overline{R})$ s'identifie à

$$\mathbb{D}(\mathbb{X}) \otimes_W A_{\text{cris}}(\overline{R}).$$

Par functorialité du cristal de Messing, la quasi-isogénie ρ induit un isomorphisme entre l'évaluation du cristal de \mathbb{X} sur $\text{Spec}(\overline{R}/p\overline{R}) \hookrightarrow \text{Spf } A_{\text{cris}}(\overline{R})$ et celui de X c'est à dire un isomorphisme

$$\mathbb{D}(\mathbb{X}) \otimes_W B_{\text{cris}}^+(\overline{R}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(X)_{A_{\text{cris}}(\overline{R}) \rightarrow \widehat{\overline{R}}} \left[\frac{1}{p} \right].$$

Par application du foncteur cristal de Dieudonné sur le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{X} \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_p} R/pR)^{(p)} & \xrightarrow{\rho^{(p)}} & (X \otimes_R R/pR)^{(p)} \\ \downarrow V & & \downarrow V \\ \mathbb{X} \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_p} R/pR & \xrightarrow{\rho} & X \otimes_R R/pR \end{array}$$

on déduit que l'isomorphisme précédent est compatible aux morphismes semi-linéaires induits par le *Verschiebung*. La compatibilité aux actions de Galois est due à la functorialité de cristal associée aux morphismes dans $\text{NCRIS}(S/\Sigma)$ pour $\gamma \in \text{Gal}(\overline{R}/R)$:

$$(A_{\text{cris}}(\overline{R}) \rightarrow \widehat{\overline{R}}) \xrightarrow{(\gamma, \gamma)} (A_{\text{cris}}(\overline{R}) \rightarrow \widehat{\overline{R}}).$$

□

Pour la construction de l'isomorphisme désiré, nous aurons besoin de la propriété suivante des anneaux $B_{\text{cris}}(\overline{R})$. Dans le cas de la théorie de Fontaine « classique » il s'agit de l'exactitude à gauche de la suite exacte fondamentale de Fontaine ([Fon94] proposition 5.3.6). Tsuji a vérifié dans l'appendice de [Tsu99] qu'une telle propriété s'étendait à des anneaux plus généraux.

Théorème (Fontaine, Tsuji). *On a pour tout $i \in \mathbb{Z}$,*

$$\text{Fil}^i B_{\text{cris}}(\overline{R})^{\varphi=p^i} = \mathbb{Q}_p t^i.$$

Démonstration. Il s'agit de vérifier que les hypothèses du théorème A.3.26 de [Tsu99] sont vérifiées (Tsuji utilise l'anneau de Fontaine qui est le complété p -adique de l'enveloppe à puissances divisées et non le complété par rapport à la PD-filtration, mais sa preuve s'adapte de façon identique). En effet, on peut vérifier que la preuve de Tsuji de l'exactitude à gauche de la suite exacte fondamentale de Fontaine ne utilise que la première hypothèse concernant la connexité.

Il suffit donc de vérifier que $\text{Spec}(\overline{R}/p\overline{R})$ est connexe. Mais si $e \in \overline{R}/p\overline{R}$, vérifie $e^2 = e$, il existe une extension finie $R'|R$ dans \overline{R} telle que R' est normale et $e \in R'/pR'$. Puisque R' est p -adiquement complète on peut relever e en un idempotent de R' . L'anneau R' étant intègre on en déduit que $e \in \{0, 1\}$.

□

Notons

$$\mathbb{E} = \mathbb{D}(X)_{A_{\text{cris}}(\overline{R}) \rightarrow \widehat{\overline{R}}} = \text{Lie } E(\tilde{X}).$$

où \tilde{X} est un relèvement à A_{cris} du groupe p -divisible X via $\theta : A_{\text{cris}} \rightarrow \widehat{\overline{R}}$ (cf. [Che], paragraphe après la définition 2.5), et $\text{Lie } E(\tilde{X})$ désigne l'algèbre de Lie de l'extension vectorielle universelle de \tilde{X} .

D'après ([Che], corollaire 4.2), l'application de périodes de X induit un isomorphisme de $F \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\overline{R})$ -modules

$$V_p(X) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\overline{R}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{E}[\frac{1}{tp}].$$

Cet isomorphisme est compatible aux Frobenius semi-linéaires où sur le membre de gauche le Frobenius est $p \otimes \varphi$ et sur celui de droite c'est le Frobenius φ induit par le Verschiebung de la réduction modulo p de X . Il est de plus compatible aux filtrations où

$$\mathrm{Fil}^\bullet (V_p(X) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\overline{R})) = V_p(X) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{Fil}^\bullet B_{cris}(\overline{R})$$

et la filtration de $\mathbb{E}[\frac{1}{pt}]$ est celle induit par la filtration de \mathbb{E} donnée comme suit :

$$\begin{aligned} \mathrm{Fil}^{-1} \mathbb{E} &= \mathbb{E} \\ \mathrm{Fil}^0 \mathbb{E} &= \{x \in \mathbb{E} \mid \theta(x) \in \mathrm{Lie}((X \otimes \widehat{R})^\vee)^*\} \\ \mathrm{Fil}^n \mathbb{E} &= \mathrm{Fil}^{n+1} A_{cris} \cdot \mathbb{E} + \mathrm{Fil}^n A_{cris} \cdot \mathrm{Fil}^0 \mathbb{E}, \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

où $\theta : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E} \otimes_{A_{cris}, \theta} \widehat{R} \simeq \mathrm{Lie} E(X \otimes \widehat{R})$ par l'abus de notation.

Prenons le déterminant au dessus de $F \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\overline{R})$ de cet isomorphisme. C'est un isomorphisme

$$\det_F V_p(X) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\overline{R}) \xrightarrow{\sim} \det_{F \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\overline{R})} \mathbb{E}[\frac{1}{tp}]$$

compatible à l'action de Γ , les Frobenius et les filtrations. Le Frobenius sur $\det_F V_p(X) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\overline{R})$ est donné par $p^n \otimes \varphi$. Calculons la filtration de $\det_{F \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\overline{R})} \mathbb{E}[\frac{1}{tp}]$. Soit

$$\mathbb{E} = \bigoplus_{\tau \in \overline{I}_F} \mathbb{E}_\tau$$

la décomposition de \mathbb{E} suivant l'action de F où $\tau : \mathcal{O}_F \hookrightarrow W \subset A_{cris}(\overline{R})$. Alors,

$$\mathrm{Fil}^\bullet \mathbb{E} = \bigoplus_{\tau} \mathrm{Fil}^\bullet \mathbb{E}_\tau$$

et

$$\mathrm{Fil}^\bullet \det_{F \otimes B_{cris}} \mathbb{E}[\frac{1}{pt}] = \bigoplus_{\tau} \mathrm{Fil}^\bullet \det_{B_{cris}} \mathbb{E}_\tau[\frac{1}{tp}].$$

De plus,

$$\begin{aligned} \mathrm{Fil}^i \mathbb{E}_\tau &= \mathbb{E}_\tau \text{ si } i \leq -1, \\ \mathrm{Fil}^{-1} \mathbb{E}_\tau / \mathrm{Fil}^0 \mathbb{E}_\tau &= \mathrm{Lie}(X)_\tau \otimes_R \widehat{R}, \\ \mathrm{Fil}^i \mathbb{E}_\tau &= \mathrm{Fil}^{i+1} A_{cris}(\overline{R}) \cdot \mathbb{E}_\tau + \mathrm{Fil}^i A_{cris}(\overline{R}) \cdot \mathrm{Fil}^0 \mathbb{E}_\tau \text{ si } i > 0. \end{aligned}$$

Soit (e_1, \dots, e_n) une base du $A_{cris}(\overline{R})$ -module \mathbb{E}_τ telle que

$$\mathrm{Fil}^0 \mathbb{E}_\tau = \mathrm{Fil}^1 A_{cris} e_1 \oplus \dots \oplus \mathrm{Fil}^1 A_{cris} e_{p_\tau} \oplus A_{cris} e_{p_\tau+1} \oplus \dots \oplus A_{cris} e_n$$

(cf. [Che] rem 3.9) et donc pour $i \geq 0$,

$$\mathrm{Fil}^i \mathbb{E}_\tau = \mathrm{Fil}^{i+1} A_{cris} e_1 \oplus \dots \oplus \mathrm{Fil}^{i+1} A_{cris} e_{p_\tau} \oplus \mathrm{Fil}^i A_{cris} e_{p_\tau+1} \oplus \dots \oplus \mathrm{Fil}^i A_{cris} e_n.$$

Alors, pour tout $i \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Fil}^i \mathbb{E}_\tau[\frac{1}{pt}] &= \left\{ \frac{x}{t^k} \mid x \in \mathrm{Fil}^{i+k} \mathbb{E}_\tau[\frac{1}{p}] \right\} \\ &= \mathrm{Fil}^{i+1} B_{cris} e_1 \oplus \dots \oplus \mathrm{Fil}^{i+1} B_{cris} e_{p_\tau} \oplus \mathrm{Fil}^i B_{cris} e_{p_\tau+1} \oplus \dots \oplus \mathrm{Fil}^i B_{cris} e_n. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathrm{Fil}^i \det_{B_{cris}(\overline{R})} \mathbb{E}_\tau[\frac{1}{pt}] = \mathrm{Fil}^{i+p_\tau} B_{cris} \cdot e_1 \wedge \dots \wedge e_n$$

et que donc

$$\mathrm{Fil}^\bullet \det_{B_{cris}(\overline{R})} \mathbb{E}_\tau[\frac{1}{pt}] = \mathrm{Fil}^{\bullet+p_\tau} B_{cris}(\overline{R}) \cdot \det_{B_{cris}(\overline{R})} \mathbb{E}_\tau[\frac{1}{pt}].$$

D'après le lemme 4.7.2 il existe un isomorphisme de $F \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\overline{R})$ -modules munis d'une action de semi-linéaire d'un opérateur φ

$$\rho_* : \mathbb{D}(\mathbb{X}) \otimes_W B_{cris}(\overline{R}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{E}[\frac{1}{pt}].$$

Prenant son déterminant au dessus de $F \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\overline{R})$ on obtient un isomorphisme de $F \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\overline{R})$ -modules libres de rang 1 munis d'un opérateur semi-linéaire φ :

$$\det(\rho_*) : (\det_{\mathcal{O}_F \otimes W} \mathbb{D}(\mathbb{X})) \otimes_W B_{cris}(\overline{R}) \xrightarrow{\sim} \det_{F \otimes B_{cris}} \mathbb{E}[\frac{1}{pt}].$$

Il résulte du calcul précédent et du lemme 4.7.1 que cet isomorphisme est compatible aux filtrations. On obtient donc au final par composition un isomorphisme de $F \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\overline{R})$ modules libres de rang 1, munis de Frobenius semi-linéaires et de filtrations

$$(\det_F V_p(X)) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\overline{R}) \xrightarrow{\sim} (\det_{\mathcal{O}_F \otimes W} \mathbb{D}(\mathbb{X})) \otimes_W B_{cris}(\overline{R}).$$

Mais d'après Fontaine il existe un isomorphisme associé aux périodes de $\tilde{\mathbb{X}}$

$$\det_F V_p(\tilde{\mathbb{X}}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\mathcal{O}_{\overline{E}}) \xrightarrow{\sim} \det_{\mathcal{O}_F \otimes W} \mathbb{D}(\mathbb{X}) \otimes_W B_{cris}(\mathcal{O}_{\overline{E}}).$$

Appliquant $(-)\otimes_{B_{cris}(\mathcal{O}_{\overline{E}})} B_{cris}(\overline{R})$ on obtient un isomorphisme

$$\det_F V_p(\tilde{\mathbb{X}}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\overline{R}) \xrightarrow{\sim} \det_{\mathcal{O}_F \otimes W} \mathbb{D}(\mathbb{X}) \otimes_W B_{cris}(\overline{R})$$

compatible aux Frobenius, aux filtrations et à l'action de Γ via $\Gamma \twoheadrightarrow I_E$. On a donc obtenu au final un isomorphisme de $F \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\overline{R})$ -modules munis de Frobenius, de filtrations et d'une action semi-linéaire de Γ ,

$$\det_F V_p(X) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\overline{R}) \xrightarrow{\sim} \det_F V_p(\tilde{\mathbb{X}}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\overline{R}).$$

D'après le théorème 4.7.3, si on applique $\text{Fil}^0(-)^{\varphi=\text{Id}}$ à l'isomorphisme précédent on obtient un isomorphisme de $F[\Gamma]$ -modules

$$\beta : T[\frac{1}{p}] = \det_F V_p(X) \xrightarrow{\sim} \det_F V_p(\tilde{\mathbb{X}}).$$

Cela montre déjà que Γ agit sur $\det_F V_p(X)$ via le caractère

$$\prod_{\tau \in \tilde{I}_F} \chi_{LT, \tau}^{p\tau} : \Gamma \twoheadrightarrow I_E \longrightarrow \mathcal{O}_F^\times.$$

En résumé : on a construit un isomorphisme de φ -modules sur $F \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\overline{R})$

$$V_p(X) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\overline{R}) \xrightarrow[\sim]{\pi_1} \mathbb{E}[\frac{1}{pt}] \xleftarrow[\sim]{\rho_*} \mathbb{D}(\mathbb{X}) \otimes_W B_{cris}(\overline{R}) \xleftarrow[\sim]{\pi_2} V_p(\tilde{\mathbb{X}}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\overline{R})$$

où :

- π_1 est l'application de périodes de X
- π_2 est l'application de périodes de $\tilde{\mathbb{X}}$ à laquelle on a appliqué $(-)\otimes_{B_{cris}(\mathcal{O}_{\overline{E}})} B_{cris}(\overline{R})$
- ρ_* est induit par le lemme 4.7.2.

On a vérifié qu'après application du déterminant $\det_{F \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}}(-)$ l'isomorphisme de φ -modules précédent est un isomorphisme de φ -modules filtrés. Puis on a appliqué le foncteur $\text{Fil}^0(-)^{\varphi=\text{Id}}$ pour obtenir notre isomorphisme.

Remarquons que puisque S est connexe la hauteur de la quasi-isogénie ρ est constante.

Proposition 4.7.3. *Via l'isomorphisme $\beta : \det_F V_p(X) \xrightarrow{\sim} \det_F V_p(\tilde{\mathbb{X}})$ on a*

$$\beta(\det_{\mathcal{O}_F} T_p(X)) = p^{-\text{ht}(\rho)/d} \det_{\mathcal{O}_F} T_p(\tilde{\mathbb{X}}).$$

Démonstration. On va utiliser la proposition 4.6.1. Soit $x \in S^{rig}$ de corps résiduel K où $[K : \check{E}] < +\infty$. Soit \overline{K} une clôture algébrique de K . On peut étendre le morphisme $R \rightarrow \mathcal{O}_K$ associé à x en un morphisme $\overline{R} \rightarrow \mathcal{O}_{\overline{K}}$. Choisissons une telle extension. Quitte à remplacer R par \mathcal{O}_K et le groupe p -divisible X par $X \otimes_R \mathcal{O}_K$ on peut alors supposer que $R = \mathcal{O}_K$ et $\overline{R} = \mathcal{O}_{\overline{K}}$. Considérons

$$\det_{\mathbb{Q}_p}(\beta) : \det_{\mathbb{Q}_p} V_p(X) \xrightarrow{\sim} \det_{\mathbb{Q}_p} V_p(\tilde{\mathbb{X}}).$$

Si $\beta(T) = p^a \det_{\mathcal{O}_F} T_p(\tilde{\mathbb{X}})$ alors

$$\det_{\mathbb{Q}_p}(\beta)(\det_{\mathbb{Z}_p} T_p(X)) = p^{ad} \det_{\mathbb{Z}_p} T_p(\tilde{\mathbb{X}}).$$

Soit D le module de Dieudonné de X . Puisque $[K : \check{E}] < +\infty$, le corps résiduel de K est $\overline{\mathbb{F}}_p$ et D est un \mathcal{O}_L -module. Avec les notations précédentes on a donc

$$\mathbb{E} = D \otimes_W A_{cris}(\mathcal{O}_{\overline{K}}).$$

Notons $B_{cris} := B_{cris}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$. Considérons les isomorphismes (l'isomorphisme du milieu n'est pas compatible aux filtrations, il l'est seulement après passage au déterminant)

$$T_p(X) \otimes_{\mathbb{Z}_p} B_{cris} \xrightarrow[\sim]{\pi_1} D \otimes_W B_{cris} \xleftarrow[\sim]{\rho_*} \mathbb{D}(\mathbb{X}) \otimes_W B_{cris} \xleftarrow[\sim]{\pi_2} T_p(\tilde{\mathbb{X}}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} B_{cris}$$

où π_1 est l'isomorphisme de périodes de X et π_2 celui de $\tilde{\mathbb{X}}$. Fixons des bases de $T_p(X)$, D , $\mathbb{D}(\mathbb{X})$ et $T_p(\tilde{\mathbb{X}})$ telles que l'hypothèse de la proposition 4.6.1 soit satisfait. Soient $A \in \mathrm{GL}_{nd}(B_{cris})$ la matrice de π_1 , $B \in \mathrm{GL}_{nd}(L)$ celle de ρ_* et $C \in \mathrm{GL}_{nd}(B_{cris})$ celle de π_2 . Notons $a = \sum_{\tau} p_{\tau}$ la dimension de nos groupes p -divisibles. D'après la proposition 4.6.1

$$\begin{aligned} \det(A) &= ut^a \quad \text{où } u \in \mathbb{Z}_p^{\times} \\ \det(C) &= wt^a \quad \text{où } w \in \mathbb{Z}_p^{\times} \end{aligned}$$

et de plus

$$v_p(\det B) = \mathrm{ht}(\rho).$$

Alors,

$$\det(C^{-1}B^{-1}A) = w^{-1}u \det(B)^{-1}$$

qui est de valuation p -adique $-\mathrm{ht}(\rho)$. On en déduit le résultat. \square

On peut maintenant poser la définition suivante.

Définition 4.7.3. On fixe l'isomorphisme suivant de $F[\Gamma]$ -modules :

$$p^{\mathrm{ht}(\rho)/d} \beta : \det_{\mathcal{O}_F} T_p(X) \xrightarrow{\sim} T$$

qui induit donc un isomorphisme de \mathcal{O}_F -systèmes locaux

$$u : \det_{\mathcal{O}_F} \mathcal{T}_{|S^{rig}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{\tilde{\mu}}.$$

4.7.4. *Fonctorialité de l'isomorphisme.*

Lemme 4.7.3. L'isomorphisme $u : \det_{\mathcal{O}_F} \mathcal{T}_{|S^{rig}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{\tilde{\mu}}$ ne dépend pas canoniquement du choix fait de la clôture algébrique de $\mathrm{Frac}(R)$.

Démonstration. C'est une conséquence du fait que si $\gamma \in \Gamma$, le composé

$$\Gamma \xrightarrow{\mathrm{int}_{\gamma}} \Gamma \longrightarrow \mathrm{GL}_F(V_p(X)) \xrightarrow{\det_F} F^{\times}$$

où la seconde flèche est l'action naturelle de Γ sur $V_p(X)$, coïncide avec

$$\Gamma \longrightarrow \mathrm{GL}_F(V_p(X)) \xrightarrow{\det_F} F^{\times}.$$

\square

On doit maintenant vérifier que les conditions de la proposition 4.7.2 sont vérifiées. Soit donc (S', X', ρ') un autre triplet adapté et un morphisme $f : S' \rightarrow S$ tel que $(X', \rho') = f^*(X, \rho)$. Notons $S' = \mathrm{Spf}(R')$. On suppose bien sûr que $S' \neq \emptyset$.

Lemme 4.7.4. Le morphisme $f^* : R \rightarrow R'$ est injectif.

Démonstration. Le morphisme $f^{rig} : S'^{rig} \rightarrow S^{rig}$ identifie S'^{rig} à un ouvert admissible de S^{rig} . Soit $x \in S'^{rig}$ et \mathfrak{m} l'idéal maximal de $R[\frac{1}{p}]$ associé à $f(x)$. Puisque $R[\frac{1}{p}]$ est intègre noethérien

$$R[\frac{1}{p}] \hookrightarrow R[\frac{1}{p}]_{\mathfrak{m}} \hookrightarrow \widehat{R[\frac{1}{p}]_{\mathfrak{m}}}.$$

Mais d'après la proposition 3, sec. 7.3.2 chap. 7 de [BGR84], le morphisme naturel

$$R[\frac{1}{p}]_{\mathfrak{m}} \longrightarrow \mathcal{O}_{S^{rig}, f(x)}$$

induit un isomorphisme

$$\widehat{R[\frac{1}{p}]_{\mathfrak{m}}} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{O}}_{S^{rig}, f(x)}.$$

Puisque $S'^{rig} \rightarrow S^{rig}$ est une immersion ouverte on a $\mathcal{O}_{S^{rig}, f(x)} = \mathcal{O}_{S'^{rig}, x}$ et on conclut. \square

Soit $\overline{\text{Frac}(R')}$ une clôture algébrique de $\text{Frac}(R')$ et $\overline{R'}$ l'anneau associé comme précédemment. Soit $\overline{\text{Frac}(R)}$ la clôture algébrique de $\text{Frac}(R)$ dans $\overline{\text{Frac}(R')}$ et \overline{R} l'anneau associé. Il y a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} R & \subset & R' \\ \cap & & \cap \\ \overline{R} & \subset & \overline{R'} \end{array}$$

Notons $\Gamma = \text{Gal}(\overline{R}|R)$ et $\Gamma' = \text{Gal}(\overline{R'}|R')$. Il y a un morphisme naturel $\Gamma' \rightarrow \Gamma$. Si $\bar{\eta}'$ est le point géométrique de $\text{Spec}(R'[\frac{1}{p}])$ associé au choix de la clôture algébrique $\overline{\text{Frac}(R')}$ et $\bar{\eta}$ celui de $\text{Spec}(R[\frac{1}{p}])$, il s'agit du morphisme

$$\pi_1(\text{Spec}(R'[\frac{1}{p}]), \bar{\eta}') \rightarrow \pi_1(\text{Spec}(R[\frac{1}{p}]), \bar{\eta}).$$

Le diagramme précédent induit un diagramme d'épaississement à puissances divisées

$$\begin{array}{ccc} A_{cris}(\overline{R}) & \longrightarrow & \widehat{\overline{R}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{cris}(\overline{R'}) & \longrightarrow & \widehat{\overline{R'}} \end{array}$$

Les flèches de ce diagramme sont Γ' équivariantes où l'action de Γ' sur les objets du haut est déduite de l'action de Γ et du morphisme $\Gamma' \rightarrow \Gamma$. Soient

$$\begin{aligned} \beta_X &: \det_F V_p(X) \xrightarrow{\sim} \det_F V_p(\widehat{X}) \\ \beta_{X'} &: \det_F V_p(X') \xrightarrow{\sim} \det_F V_p(\widehat{X'}) \end{aligned}$$

les deux isomorphismes construits précédemment où β_X est un isomorphisme de $F[\Gamma]$ -modules et $\beta_{X'}$ de $F[\Gamma']$ -modules. Puisque $X' = X \otimes_R R'$, il existe un isomorphisme

$$V_p(X) \xrightarrow{\sim} V_p(X')$$

qui est compatible à l'action de Γ' via $\Gamma' \rightarrow \Gamma$. On veut montrer que le déterminant de cet isomorphisme composé avec $\beta_{X'}$ coïncide avec β_X . Il suffit pour cela de montrer que ces deux isomorphismes auxquels on applique $(-) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\overline{R'})$ coïncident. Mais cela résulte de l'existence du diagramme d'épaississements à puissances divisées précédent, l'évaluation de tous les cristaux que nous avons utilisés sur $A_{cris}(\overline{R'}) \rightarrow \widehat{\overline{R'}}$ s'obtenant canoniquement par application de $(-) \otimes_{A_{cris}(\overline{R})} A_{cris}(\overline{R'})$ à leur évaluation sur $A_{cris}(\overline{R}) \rightarrow \widehat{\overline{R}}$.

4.7.5. *Compatibilité à l'action de $J(\mathbb{Q}_p)$.* Soit $g \in J(\mathbb{Q}_p)$, $g \in \text{Aut}(\mathbb{D}(\mathbb{X})[\frac{1}{p}], \varphi)$. Avec les notations précédentes, dans l'isomorphisme

$$\rho_*^{-1} : \mathbb{E}[\frac{1}{pt}] \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(\mathbb{X})[\frac{1}{p}] \otimes_L B_{cris}(\overline{R})$$

si on remplace ρ par $\rho \circ (g \otimes \text{Id})^{-1}$ on a

$$(\rho \circ g^{-1})_*^{-1} = (g \otimes \text{Id}) \circ \rho_*^{-1}.$$

Prenant le déterminant sur $F \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\overline{R})$ on a

$$\det_{F \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}}((\rho \circ g^{-1})_*^{-1}) = \det(g) \cdot \det_{F \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}}(\rho_*^{-1})$$

où $\det(g) \in F^\times$. On a de plus

$$\text{ht}(\rho \circ g^{-1}) = \text{ht}(\rho) - dv_p(\det(g)).$$

En se référant à la définition 4.7.3 on constate donc que pour $g \in J(\mathbb{Q}_p)$ qui induit $g : \check{\mathcal{M}}^{rig} \xrightarrow{\sim} \check{\mathcal{M}}^{rig}$, on a $g^*u : \det_{\mathcal{O}_F} \mathcal{T} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{\bar{\mu}}$ est égal à $p^{-v_p(\det g)} \det(g) \cdot u$.

4.7.6. *Compatibilité à l'action de $G(\mathbb{Q}_p)$.* On a construit précédemment un isomorphisme de \mathcal{O}_F -systèmes locaux sur l'espace rigide $\check{\mathcal{M}}^{rig}$

$$u : \det_{\mathcal{O}_F} \mathcal{T} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{\check{\mu}}.$$

Pour $K \subset \text{Aut}(\Lambda_0)$ un sous-groupe ouvert, on pose maintenant

$$u_K = \pi_K^* u : \det_{\mathcal{O}_F} \mathcal{T}_K \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{\check{\mu}}$$

où $\pi_k : \check{\mathcal{M}}_K \rightarrow \check{\mathcal{M}}^{rig}$. Il reste à vérifier le point (3) du théorème 4.4.2.

Soit (S, X, ρ) un triplet adapté. On choisit comme précédemment un anneau \overline{R} et on note $T_p(X)$ le $\Gamma := \text{Gal}(\overline{R}|R)$ -module associé. Soit $K \subset \text{Aut}(\Lambda_0)$ et $g \in G(\mathbb{Q}_p)$ vérifiant :

- $g^{-1}Kg \subset \text{Aut}(\Lambda_0)$,
- $\Lambda_0 \subset g.\Lambda_0$.

Supposons de plus que l'on dispose d'une structure de niveau K

$$\bar{\eta} : \Lambda_0 \xrightarrow{\sim} T_p(X) [K],$$

c'est à dire un isomorphisme de \mathcal{O}_F -modules

$$\eta : \Lambda_0 \xrightarrow{\sim} T_p(X)$$

via lequel l'action de Γ sur $T_p(X)$ se fasse à travers K et où $\bar{\eta}$ désigne la classe de K -conjugaison de η . Le quadruplet $(S, X, \rho, \bar{\eta})$ définit un élément $x \in \check{\mathcal{M}}_K(S^{rig})$.

Supposons de plus que l'on a un sous-groupe plat fini $C \subset X$ stable sous l'action de \mathcal{O}_F tel que le composé

$$\Lambda_0 \xrightarrow[\sim]{\eta} T_p(X) \hookrightarrow T_p(X/C)$$

induit un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_0 & \xrightarrow[\sim]{\eta} & T_p(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ g.\Lambda_0 & \xrightarrow{\sim} & T_p(X/C). \end{array}$$

Alors,

$$\eta \circ g : \Lambda_0 \xrightarrow{\sim} T_p(X/C)$$

induit une structure de niveau

$$\overline{\eta \circ g} : \Lambda_0 \xrightarrow{\sim} T_p(X/C) [g^{-1}Kg].$$

Soit $f : X \rightarrow X/C$ l'isogénie. Alors, via l'isomorphisme

$$g : \check{\mathcal{M}}_K \xrightarrow{\sim} \check{\mathcal{M}}_{g^{-1}Kg},$$

le quadruplet $(S, X/C, f \circ \rho, \overline{\eta \circ g})$ correspond au point $g.x \in \check{\mathcal{M}}_{g^{-1}Kg}(S^{rig})$.

Notons \mathbb{E} , resp. \mathbb{E}' l'évaluation du cristal de Dieudonné de X sur l'épaississement $A_{cris}(\overline{R}) \rightarrow \widehat{\overline{R}}$. L'isogénie $f : X \rightarrow X/C$ induit un morphisme $\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ compatible à l'action de \mathcal{O}_F . Par functorialité du cristal de Dieudonné on a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} V_p(X) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{E}[\frac{1}{pt}] \xleftarrow[\sim]{\rho^*} \mathbb{D}(\mathbb{X}) \otimes_W B_{cris} \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \parallel \\ V_p(X/C) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{E}'[\frac{1}{pt}] \xleftarrow[\sim]{(f \circ \rho)^*} \mathbb{D}(\mathbb{X}) \otimes_W B_{cris} \end{array}$$

où les applications horizontales de gauche sont les application de périodes de X et X/C . Soient

$$\begin{array}{ccc} \beta_X : \det_F V_p(X) & \xrightarrow{\sim} & \det_F V_p(\widehat{\mathbb{X}}) \\ \beta_{X/C} : \det_F V_p(X/C) & \xrightarrow{\sim} & \det_F V_p(\widehat{\mathbb{X}}) \end{array}$$

les isomorphismes construite précédemment. Il résulte de la commutativité du diagramme précédent que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \det_F V_p(X) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\overline{R}) & \xrightarrow[\sim]{\beta_X \otimes \text{Id}} & \det_F V_p(\tilde{X}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\overline{R}) \\ \det V_p(f) \downarrow \simeq & & \parallel \\ \det_F V_p(X/C) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\overline{R}) & \xrightarrow[\sim]{\beta_{X/C} \otimes \text{Id}} & \det_F V_p(\tilde{X}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\overline{R}) \end{array}$$

est commutatif. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \det_F V_p(X) & \xrightarrow[\sim]{\beta_X} & \det_F V_p(\tilde{X}) \\ \det V_p(f) \downarrow \simeq & & \parallel \\ \det_F V_p(X/C) & \xrightarrow[\sim]{\beta_{X/C}} & \det_F V_p(\tilde{X}) \end{array}$$

l'est donc. On en déduit la propriété (3) du théorème 4.4.2.

4.7.7. *Compatibilité à la donnée de descente.* Avec les notations précédentes, via l'identification canonique

$$\det_{\mathcal{O}_F} T_p(\tilde{X}) = \det_{\mathcal{O}_F} T_p(\sigma_E^* \tilde{X}),$$

on a un diagramme commutatif

$$(7) \quad \begin{array}{ccc} \det_F V_p(\tilde{X}) \otimes B_{cris}(\mathcal{O}_{\overline{E}}) & \xrightarrow{\det_{F \otimes B_{cris}} \pi_2} & \det_{F \otimes L} \mathbb{D}(\mathbb{X})[\frac{1}{p}] \otimes_L B_{cris}(\mathcal{O}_{\overline{E}}) \\ \parallel & & \downarrow (\text{Frob}_E)_* \\ \det_F V_p(\sigma_E^* \tilde{X}) \otimes B_{cris}(\mathcal{O}_{\overline{E}}) & \xrightarrow{p^{a'} \det_{F \otimes B_{cris}} \pi'_2} & \det_{F \otimes L} \mathbb{D}(\sigma_E^* \mathbb{X})[\frac{1}{p}] \otimes_L B_{cris}(\mathcal{O}_{\overline{E}}) \end{array}$$

d'après la proposition 4.5.2, où π'_2 est l'application de périodes de $\sigma_E^* \tilde{X}$ et $a' = \frac{[E:\mathbb{Q}_p]}{d} \sum_{\tau \in \tilde{I}_F} p_\tau$. Dans l'isomorphisme composé

$$\pi_2^{-1} \circ \rho_*^{-1} : \mathbb{E}[\frac{1}{pt}] \xrightarrow{\rho_*^{-1}} \mathbb{D}(\mathbb{X}) \otimes_W B_{cris}(\mathcal{O}_{\overline{E}}) \xrightarrow{\pi_2^{-1}} V_p(\tilde{X}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\mathcal{O}_{\overline{E}}),$$

on remplace ρ par $\rho \circ (\text{Frob}_E)^{-1}$, et π_2 est remplacé par π'_2 :

$$\mathbb{E}[\frac{1}{pt}] \xrightarrow{\rho_*^{-1}} \mathbb{D}(\mathbb{X}) \otimes_W B_{cris}(\mathcal{O}_{\overline{E}}) \xrightarrow{(\text{Frob}_E)_*} \mathbb{D}(\sigma_E^* \mathbb{X}) \otimes_W B_{cris}(\mathcal{O}_{\overline{E}}) \xrightarrow{\pi_2'^{-1}} V_p(\sigma_E^* \tilde{X}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\mathcal{O}_{\overline{E}}).$$

En prenant le déterminant sur $F \otimes B_{cris}(\mathcal{O}_{\overline{E}})$, d'après le diagramme commutatif (7), on a

$$\det_{F \otimes B_{cris}}(\pi_2'^{-1} \circ (\text{Frob}_E)_* \circ \rho_*^{-1}) = p^{a'} \det_{F \otimes B_{cris}}(\pi_2^{-1} \circ \rho_*^{-1})$$

En se référant à la définition 4.7.3, on en déduit la propriété (4) du théorème 4.4.2.

Cela termine la démonstration du théorème 4.4.2. □

5. LE MORPHISME DÉTERMINANT POUR LE TYPE P.E.L.

5.1. **Reformulation de la définition d'une structure de niveau P.E.L..** Avant de définir le morphisme déterminant dans le cas P.E.L. on a besoin de reformuler les définitions 2.6.3 et 2.6.4 concernant les structures de niveau avec polarisation. Il ne s'agit que d'un jeu sur les définitions mais on préfère clarifier ce point.

Plaçons nous donc dans une situation P.E.L., c'est à dire que l'on a fixé une donnée de type P.E.L. non-ramifiée simple (cf. section 2.3). Soit G le groupe réductif associé. Rappelons que l'on note

$$c : G \longrightarrow \mathbb{G}_m$$

le facteur de similitude. On a fixé un réseau autodual $\Lambda_0 \subset V$ pour l'accouplement $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et on note $G(\mathbb{Z}_p)$ le sous-groupe compact de $G(\mathbb{Q}_p)$ associé.

Lemme 5.1.1. Soit Y un \check{E} -espace rigide et H un groupe p -divisible rigide sur Y muni d'une structure additionnelle P.E.L. (ι, λ) associée au groupe G , $\iota : \mathcal{O}_F \rightarrow \text{End}(H)$ et $\lambda : H \xrightarrow{\sim} H^\vee$. Supposons H muni d'une structure de niveau $K \subset G(\mathbb{Z}_p)$. Alors, μ_p^{rig} est muni d'une structure de niveau $c(K)$ telle que pour tout point géométrique $x \in Y(\check{E})$ si

$$\eta : \Lambda_0 \xrightarrow{\sim} T_p(H_x)$$

a pour K -orbite celle associée à la structure de niveau K sur H , il existe

$$\eta_c : \mathbb{Z}_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p(1)$$

ayant pour $c(K)$ -orbite celle associée à la structure de niveau $c(K)$ sur μ_p^{rig} telle que si

$$(\cdot, \cdot) : T_p(H_x) \times T_p(H_x) \longrightarrow \mathbb{Z}_p(1)$$

est l'accouplement associé à la polarisation λ de H alors

$$(\eta(\bullet), \eta(\bullet)) = \eta_c \circ \langle \bullet, \bullet \rangle .$$

Démonstration. Soient $v_1, v_2 \in \Lambda_0$ vérifiant $\langle v_1, v_2 \rangle = 1$. Posons pour $a \in \mathbb{Z}_p$

$$\eta_c(a) = a(\eta(v_1), \eta(v_2)).$$

D'après la définition 2.6.3, si $f : \mathbb{Z}_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p(1)$ il existe $u \in \mathbb{Z}_p^\times$ tel que

$$(\eta(\bullet), \eta(\bullet)) = u.f \circ \langle \bullet, \bullet \rangle .$$

Appliquant cette égalité au couple de vecteurs (v_1, v_2) on obtient

$$\eta_c(1) = (\eta(v_1), \eta(v_2)) = uf(1).$$

On a donc $\eta_c = u.f : \mathbb{Z}_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p(1)$ et

$$(\eta(\bullet), \eta(\bullet)) = \eta_c \circ \langle \bullet, \bullet \rangle .$$

Bien sûr, η_c ne dépend pas du choix fait de v_1 et v_2 .

Maintenant, si $\gamma \in \pi_1(Y, x)$, par définition d'une structure de niveau K , il existe $k \in K$ tel que

$$\begin{aligned} \gamma.\eta(v_1) &= \eta(k.v_1) \\ \gamma.\eta(v_2) &= \eta(k.v_2). \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \gamma.\eta_c(1) &= \gamma.\eta_c(\langle v_1, v_2 \rangle) \\ &= \gamma.(\eta(v_1), \eta(v_2)) \\ &= (\gamma.\eta(v_1), \gamma.\eta(v_2)) \\ &= (\eta(k.v_1), \eta(k.v_2)) \\ &= \eta_c(\langle k.v_1, k.v_2 \rangle) \\ &= \eta_c(c(k) \langle v_1, v_2 \rangle) \\ &= c(k)\eta_c(1). \end{aligned}$$

On en déduit que η_c définit une structure de niveau $c(K)$ sur $\mathbb{Z}_p(1)$. □

Avant d'aller plus loin on a besoin de préciser un point concernant « la » polarisation de la déformation universelle \mathbb{X}^{univ} sur $\check{\mathcal{M}}$. En effet, X^{univ} n'est pas muni d'une polarisation principale mais d'une classe de \mathbb{Z}_p^\times -homothétie de telle polarisation (cf. le dernier point de la définition 2.4.3). Néanmoins il y a un moyen de choisir un représentant dans cette classe de la façon suivante.

Convention : Soit S un $\text{Spf}(\mathcal{O}_{\check{E}})$ -schéma et $(X, \lambda', \rho) \in \check{\mathcal{M}}(S)$ où λ' est définie à priori à un \mathbb{Z}_p^\times -multiple près. On choisit $\lambda' : X \xrightarrow{\sim} X^\vee$ comme étant l'unique polarisation principale telle que le

diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X}_{\overline{S}} & \xrightarrow{\rho} & X_{\overline{S}} \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \lambda' \\ \mathbb{X}_{\overline{S}}^{\vee} & \xleftarrow{\rho^{\vee}} & X_{\overline{S}}^{\vee} \end{array}$$

commute à une puissance de p près (et non pas à un \mathbb{Q}_p^{\times} -multiple près).

À cause de la convention précédente l'action de $J(\mathbb{Q}_p)$ sur $\check{\mathcal{M}}$ se décrit de façon légèrement différente.

Lemme 5.1.2. *Soit $c : J \rightarrow \mathbb{G}_m$ déduit du facteur de similitude $c : G \rightarrow \mathbb{G}_m$. Avec la convention précédente, si $(X, \lambda', \rho) \in \check{\mathcal{M}}(S)$ et $g \in J(\mathbb{Q})$ on a*

$$g.(X, \lambda', \rho) = (X, p^{-v_p(c(g))}c(g)\lambda', \rho \circ g^{-1}).$$

Démonstration. La commutativité du diagramme précédente à une puissance de p près s'énonce en

$$\rho^{\vee} \circ \lambda' \circ \rho = p^i \lambda$$

pour un $i \in \mathbb{Z}$. On a donc

$$\begin{aligned} (\rho \circ g^{-1})^{\vee} \circ \lambda' \circ (\rho \circ g^{-1}) &= p^i (g^{-1})^{\vee} \circ \lambda \circ g^{-1} \\ &= p^i c(g)^{-1} \lambda. \end{aligned}$$

soit encore

$$(\rho \circ g^{-1})^{\vee} \circ (p^{-v_p(c(g))}c(g)\lambda') \circ (\rho \circ g^{-1}) = p^{i-v_p(c(g))} \lambda.$$

Le résultat s'en déduit. \square

Avec la convention précédente on parlera désormais de *la* polarisation de la déformation universelle X^{univ} sur $\check{\mathcal{M}}$. La proposition qui suit se déduit alors du lemme 5.1.1.

Proposition 5.1.1. *Pour tout entier $m \geq 1$, soit \mathcal{N}_m le faisceau étale sur $\check{\mathcal{M}}^{\text{rig}}$ formé des couples (η, η_c) où :*

- $\eta : \Lambda_0/p^m \Lambda_0 \xrightarrow{\sim} X^{\text{univ}}[p^m]^{\text{rig}}$ est un isomorphisme compatible à l'action de \mathcal{O}_F ,
- $\eta_c : \mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z}(1)$
- l'accouplement $(\cdot, \cdot) : X^{\text{univ}}[p^m]^{\text{rig}} \times X^{\text{univ}}[p^m]^{\text{rig}} \rightarrow \mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z}(1)$ associé à la polarisation de X^{univ} est tel que

$$\eta_c \circ \langle \bullet, \bullet \rangle = (\eta(\bullet), \eta(\bullet)).$$

Munissons \mathcal{N}_m de l'action de $G(\mathbb{Z}_p)$ en posant $g.(\eta, \eta_c) = (\eta \circ g, c(g)\eta_c)$. Alors, si $K \subset G(\mathbb{Z}_p)$ est un sous-groupe ouvert on a

$$\check{\mathcal{M}}_K = \mathcal{N}_m / K$$

pour un m tel que $K \subset \ker(G(\mathbb{Z}_p) \rightarrow G(\mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z}))$.

Voici une formulation plus savante de la proposition précédente. Au groupe étale fini $X^{\text{univ}}[p^m]^{\text{rig}}$ muni de son action de \mathcal{O}_F et de l'accouplement

$$X^{\text{univ}}[p^m]^{\text{rig}} \times X^{\text{univ}}[p^m]^{\text{rig}} \rightarrow \mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z}(1)$$

donné par la polarisation est associé un $G(\mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z})$ -torseur étale \mathcal{E} . Si $c : G(\mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z}) \rightarrow (\mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z})^{\times}$, le poussé en avant de ce toseur $c_* \mathcal{E}$ est le $(\mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z})^{\times}$ -torseur associé à $\mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z}(1)$ c'est à dire $\underline{\text{Isom}}(\mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z}(1))$. Alors, une structure de niveau $\ker(G(\mathbb{Z}_p) \rightarrow G(\mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z}))$ n'est rien d'autre qu'une trivialisaton de ce toseur. Par application de c_* , cette trivialisaton de \mathcal{E} induit une trivialisaton du toseur associé à $\mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z}(1)$ c'est à dire une structure de niveau $1 + p^m \mathbb{Z}_p$ sur $\mathbb{Z}_p(1)$ qui est celle notée η_c .

5.2. Le cas symplectique. Soient $(F, V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \bar{b}, \bar{\mu})$ une donnée de type P.E.L non ramifiée simple de type symplectique. On reprend les notations des sections 2.3 et 2.4. Rappelons qu'on note Λ_0 un réseau autodual dans V . On note encore $G = \mathrm{Gsp}_{\mathcal{O}_F}(\Lambda_0, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ pour le modèle entier de $G = \mathrm{Gsp}_F(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ défini par ce réseau. On a donc $G(\mathbb{Z}_p) = G(\mathbb{Q}_p) \cap \mathrm{Aut}(\Lambda_0)$. On note $(\check{\mathcal{M}}_K)_{K \subset G(\mathbb{Z}_p)}$ la tour d'espaces rigides associée. Le corps reflex associé est $E = \mathbb{Q}_p$.

Dans le cas symplectique la définition du morphisme déterminant est particulièrement simple car le cocentre de G l'est. Plus précisément, comme dans le cas E.L. on définit

$$D = G/G^{\mathrm{der}} = \mathbb{G}_m,$$

la projection $G \rightarrow D$ étant donnée par le facteur de similitude

$$c : G \longrightarrow \mathbb{G}_m.$$

Le morphisme

$$\begin{aligned} \det_F : G &\longrightarrow \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \mathbb{G}_m \\ g &\longmapsto \det_F(g; V) \end{aligned}$$

est donné en fonction du facteur de similitude par

$$\det_F = c^{\frac{n}{2}}.$$

Rappelons le lemme suivant.

Lemme 5.2.1. *La hauteur de la quasi-isogénie universelle ρ sur $\check{\mathcal{M}}$ est divisible par $\frac{nd}{2}$. Plus précisément, si S est connexe, $(X, \lambda', \rho) \in \check{\mathcal{M}}(S)$ et dans le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X}_{\bar{S}} & \xrightarrow{\rho} & X_{\bar{S}} \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \lambda' \\ \mathbb{X}_{\bar{S}}^{\vee} & \xleftarrow{\rho^{\vee}} & X_{\bar{S}}^{\vee} \end{array}$$

on a $\lambda' = p^i \cdot \rho^{\vee-1} \circ \lambda \circ \rho^{-1}$ alors

$$\mathrm{ht} \rho = \frac{nd}{2} i.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \mathrm{ht}(\lambda') &= \mathrm{ht}(p^i \cdot \rho^{\vee-1} \circ \lambda \circ \rho^{-1}) \\ &= \mathrm{ht}(p^i) + \mathrm{ht}(\rho^{\vee-1}) + \mathrm{ht}(\lambda) + \mathrm{ht}(\rho^{-1}) \\ &= ndi - \mathrm{ht} \rho + \mathrm{ht}(\lambda) - \mathrm{ht}(\rho) \end{aligned}$$

Comme λ et λ' sont les isomorphismes, d'où le résultat. □

On a dans la situation symplectique $\Delta = \mathbb{Z}$ et

$$\begin{aligned} \varkappa : \check{\mathcal{M}} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (X, \lambda, \rho) &\longmapsto -\frac{2}{nd} \mathrm{ht} \rho \end{aligned}$$

qui d'après le lemme 5.2.1 s'interprète en termes de polarisations.

Le morphisme $c : G \rightarrow \mathbb{G}_m$ définit un morphisme $c : J \rightarrow \mathbb{G}_m$ et alors pour $g \in J(\mathbb{Q}_p)$,

$$\omega_J(g) = v_p(c(g)).$$

Lemme 5.2.2. *Le morphisme de groupes $c : J(\mathbb{Q}_p) \rightarrow D(\mathbb{Q}_p)$ est surjectif.*

Démonstration. Le groupe J est une forme intérieure d'un sous-groupe de Levi M de G , le centralisateur du morphisme des pentes. Un tel sous-groupe de Levi est donné par le scindage d'un drapeau isotrope dans $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Plus précisément, on peut écrire V comme somme directe de sous- F -espaces vectoriels

$$V = (V_1 \oplus \cdots \oplus V_r) \oplus E \oplus (W_r \oplus W_{r-1} \cdots \oplus W_1)$$

avec

$$(V_1 \oplus \cdots \oplus V_r)^\perp = (V_1 \oplus \cdots \oplus V_r) \oplus E$$

et pour $1 \leq i < r$,

$$(V_1 \oplus \cdots \oplus V_i)^\perp = (V_1 \oplus \cdots \oplus V_r) \oplus E \oplus (W_r \oplus \cdots \oplus W_{i+1}).$$

L'accouplement $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur E est non dégénéré et pour $1 \leq i \leq r$, il induit un accouplement parfait $V_i \times W_i \rightarrow \mathbb{Q}_p$. Si $1 \leq i \leq r$ et $g \in \mathrm{GL}(V_i)$ on note ${}^t g \in \mathrm{GL}(W_i)$ l'adjoint de g relativement à cet accouplement. Alors,

$$M = \prod_{i=1}^r \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \mathrm{GL}(V_i) \times \mathrm{Gsp}(E, \langle \cdot, \cdot \rangle) \hookrightarrow \mathrm{Gsp}(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$$

$$(g_1, \dots, g_r, h) \mapsto g_1 \oplus \cdots \oplus g_r \oplus h \oplus c(h) {}^t g_r^{-1} \oplus \cdots \oplus c(h) {}^t g_1^{-1}.$$

où $c(h) \in \mathbb{G}_m$ désigne le facteur de similitude de h et si $E = 0$ on note $\mathrm{Gsp}(E, \langle \cdot, \cdot \rangle) = \mathbb{G}_m$.

Il résulte de cette description de M que M^{der} est simplement connexe. Le groupe algébrique J^{der} l'est donc également. D'après Kneser, cela implique que le morphisme

$$J(\mathbb{Q}_p) \longrightarrow (J/J^{der})(\mathbb{Q}_p)$$

est surjectif. Mais le morphisme $c : J \rightarrow \mathbb{G}_m$ se factorise en

$$J \longrightarrow J/J^{der} = M/M^{der} \longrightarrow G/G^{der} = \mathbb{G}_m.$$

Il suffit alors de constater sur la formule donnée précédemment pour M que le morphisme

$$M(\mathbb{Q}_p) \hookrightarrow G(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{c} \mathbb{Q}_p^\times$$

est surjectif. □

Puisque pour $g \in J(\mathbb{Q}_p)$ on a $\varkappa(g.x) = \omega_J(g) + \varkappa(x)$ on en déduit la proposition suivante.

Proposition 5.2.1. *L'application $\varkappa : \check{M} \rightarrow \mathbb{Z}$ est surjective.*

Voici maintenant l'analogie du théorème 4.4.2. Sa démonstration est beaucoup plus simple que celle du théorème 4.4.2. De plus nous n'en n'aurons pas besoin dans la suite pour définir le morphisme vers l'espace de Rapoport-Zink associé au cocentre puisque celui-ci est donné par $c : G \rightarrow \mathbb{G}_m$ et non $\det : G \rightarrow \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \mathbb{G}_m$. Nous l'avons tout de même inclu.

Théorème 5.2.1. *Pour $K \subset G(\mathbb{Z}_p)$, soit \mathcal{T}_K le \mathcal{O}_F -système local sur \check{M}_K qui est le module de Tate de la déformation universelle. Il y a pour tout K un isomorphisme*

$$u_K : \det_{\mathcal{O}_F} \mathcal{T}_K \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_F(\frac{n}{2}).$$

Ils vérifient :

(1) Si $K' \subset K$ via $\pi_{K',K} : \check{M}_{K'} \rightarrow \check{M}_K$,

$$\pi_{K',K}^* u_K = u_{K'}.$$

(2) Si $g \in J(\mathbb{Q})$, qui définit l'automorphisme $g : \check{M}_K \xrightarrow{\sim} \check{M}_K$, via l'identification $g^* \mathcal{T}_K = \mathcal{T}_K$ on a

$$g^* u_K = (p^{-v_p(\det g)} \det(g)) u_K.$$

(3) Si $g \in G(\mathbb{Q}_p)$ est tel que $g^{-1}Kg \subset G(\mathbb{Z}_p)$ et $\Lambda_0 \subset g.\Lambda_0$, si $g : \check{\mathcal{M}}_K \xrightarrow{\sim} \check{\mathcal{M}}_{g^{-1}Kg}$, via le morphisme canonique

$$\mathcal{T}_K \longrightarrow g^* \mathcal{T}_{g^{-1}Kg}$$

le composé

$$\det \mathcal{T}_K \longrightarrow g^* \det \mathcal{T}_{g^{-1}Kg} \xrightarrow{g^* u_{g^{-1}Kg}} g^* \mathcal{O}_F(\frac{n}{2}) = \mathcal{O}_F(\frac{n}{2})$$

est égal à

$$p^{-v_p(\det g)} u_K.$$

(4) Soit $\alpha : \check{\mathcal{M}}_K \rightarrow \sigma_E^* \check{\mathcal{M}}_K$ la donnée de descente de Rapoport-Zink. Via les isomorphismes canoniques

$$\mathcal{T}_K = \alpha^* \sigma_E^* \mathcal{T}_K \text{ et } \sigma_E^* \mathcal{L}_{\tilde{\mu}} = \mathcal{L}_{\tilde{\mu}},$$

le morphisme composé

$$\det \mathcal{T}_K = \alpha^* \sigma_E^* \det \mathcal{T}_K \xrightarrow{\alpha^* \sigma_E^* u_K} \alpha^* \sigma_E^* f_K^* \mathcal{L}_{\tilde{\mu}} = f_K^* \sigma_E^* \mathcal{L}_{\tilde{\mu}} = f_K^* \mathcal{L}_{\tilde{\mu}}$$

est égal à u_K .

Démonstration. Soit $m \geq 1$. On a deux morphismes de groupes

$$\begin{aligned} \det_m : G(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}) &\longrightarrow (\mathcal{O}_F/p^m\mathcal{O}_F)^\times \\ c_m : G(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}) &\longrightarrow (\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^\times. \end{aligned}$$

Au groupe étale fini polarisé muni de son action de \mathcal{O}_F , $(X^{\text{univ}}[p^m]^{\text{rig}}, \lambda')$ est associé un $G(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})$ -torseur étale \mathcal{E}_m (cf. section 5.1). On doit calculer son poussé en avant, $\det_{m*} \mathcal{E}_m$. Puisque

$$\det_m = i \circ c_m^{n/2},$$

où $i : (\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^\times \hookrightarrow (\mathcal{O}_F/p^m\mathcal{O}_F)^\times$, on a

$$\det_{m*} \mathcal{E}_m = i_*(c_{m*} \mathcal{E}_m)^{n/2}.$$

Mais (cf. toujours la section 5.1),

$$c_{m*} \mathcal{E}_m = \underline{\text{Isom}}(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}(1)).$$

Les diverses égalités précédentes sont compatibles lorsque m varie. Le résultat s'en déduit facilement. En particulier, on retrace facilement les actions de $J(\mathbb{Q}_p)$ et $G(\mathbb{Q}_p)$ (il faut utiliser le lemme 5.1.2 pour l'action de $J(\mathbb{Q}_p)$). \square

Voici maintenant le morphisme « déterminant » que l'on devrait plutôt appeler morphisme facteur de similitude dans ce cas là. Soit $(D, c \circ \tilde{\mu})$ comme donnée de Rapoport-Zink torique (cf. 3). On a $D = \mathbb{G}_m$ et $c \circ \tilde{\mu} : z \mapsto z^{-1}$ car $c \circ \mu : z \mapsto z$ (cf. def. 2.3.1). Pour $K \subset \mathbb{Z}_p^\times$ un sous-groupe ouvert, l'espace de Rapoport-Zink torique $\check{\mathcal{M}}(D, c \circ \tilde{\mu})$ classe les structures de niveau K sur $\mathbb{Q}_p(1)$.

Théorème 5.2.2. *Soit $(\check{\mathcal{M}}(D, c \circ \tilde{\mu})_K)_K$ la tour de Rapoport-Zink associé à la donnée torique $(D, c \circ \tilde{\mu})$. Il existe un morphisme $J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant surjectif de tours de \check{E} -espaces rigides*

$$(\check{\mathcal{M}}_K)_K \longrightarrow (\check{\mathcal{M}}(D, c \circ \tilde{\mu})_{c(K)})_K$$

où l'équivariance est relative au morphisme $(c, c) : J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p) \rightarrow D(\mathbb{Q}_p) \times D(\mathbb{Q}_p)$. Ce morphisme est compatible aux applications localement constantes $\varkappa : \check{\mathcal{M}}_K \rightarrow \Delta$ et $\varkappa_{D, c \circ \tilde{\mu}} : \check{\mathcal{M}}(D, c \circ \tilde{\mu})_{c(K)} \rightarrow \Delta$, et est compatible à la donnée de descente de Rapoport-Zink.

Démonstration. D'après la proposition 5.1.1, le faisceau $\mathbb{Z}_p(1)$ sur $\check{\mathcal{M}}_K$ est muni d'une structure de niveau $c(K)$ associée à la polarisation,

$$\bar{\eta}_c : \mathbb{Z}_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p(1) [c(K)].$$

On définit alors une structure de niveau $c(K)$ sur $\mathbb{Q}_p(1)$

$$p^{-\varkappa} \bar{\eta}_c : \mathbb{Q}_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_p(1) [c(K)]$$

et donc un morphisme $\check{\mathcal{M}}_K \rightarrow \check{\mathcal{M}}(D, c \circ \bar{\mu})_{c(K)}$. On vérifie que ce morphisme est compatible aux actions de $J(\mathbb{Q}_p)$ et $G(\mathbb{Q}_p)$ (pour l'action de $J(\mathbb{Q}_p)$ il faut utiliser le lemme 5.1.2) et à la donnée de descente de Rapoport-Zink. \square

5.3. Le cas unitaire. Soient $(F, *, V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \bar{b}, \bar{\mu})$ une donnée de type P.E.L non ramifiée simple unitaire (2.3) et $\check{\mathcal{M}}$ l'espace de Rapoport-Zink associé.

Comme précédemment on définit

$$D = G/G^{der}$$

le cocentre et

$$\det : G \longrightarrow D$$

le morphisme quotient. On a alors

$$D = \{(x, c) \in \text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m \mid N_{F/F_0}(x) = c^n\}$$

où $N_{F/F_0} : \text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \mathbb{G}_m \rightarrow \text{Res}_{F_0/\mathbb{Q}_p} \mathbb{G}_m$ et F_0 est l'ensemble des points fixes de F sous l'involution $*$. Via cette identification

$$\begin{aligned} \det : G &\longrightarrow D \\ g &\longmapsto (\det_F(g; V), c(g)). \end{aligned}$$

Le groupe $X_{\mathbb{Q}_p}^*(G)$ est engendré par $c : G \rightarrow \mathbb{G}_m$ qui fournit une identification

$$\Delta = \mathbb{Z}.$$

D'après le lemme 5.2.1, la hauteur de la quasi-isogénie universelle est divisible par $\frac{nd}{2}$. Alors,

$$\begin{aligned} \varkappa : \check{\mathcal{M}} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (X, \lambda', \rho) &\longmapsto -\frac{2}{nd} \text{ht} \rho. \end{aligned}$$

Le morphisme $c : G \rightarrow \mathbb{G}_m$ induit $c : J \rightarrow \mathbb{G}_m$ et pour $g \in J(\mathbb{Q}_p)$

$$\omega_J(g) = v_p(c(g)).$$

Calculons l'image de l'application \varkappa .

Proposition 5.3.1. *Si n est impair l'application \varkappa est à valeurs dans $2\mathbb{Z}$.*

Démonstration. Soit $x = (X, \lambda', \rho) \in \check{\mathcal{M}}(\overline{\mathbb{F}}_p)$. Par définition,

$$\varkappa(x) = -\frac{2}{nd} \text{ht} \rho \in \mathbb{Z}.$$

D'après lemme 4.1.1, $\frac{1}{d} \text{ht} \rho \in \mathbb{Z}$. On en déduit que $\varkappa(x) \in 2\mathbb{Z}$ lorsque n est impair. \square

Voici maintenant l'analogue du lemme 5.2.2.

Lemme 5.3.1. *Le morphisme de groupes $c : J(\mathbb{Q}_p) \rightarrow D(\mathbb{Q}_p)$ est surjectif.*

Démonstration. On reprend le raisonnement du lemme 5.2.2. Le groupe algébrique J est forme intérieure du sous-groupe de Levi M . Précisons la structure de M . On peut écrire V comme somme directe de sous- F -espaces vectoriels

$$V = (V_1 \oplus \cdots \oplus V_r) \oplus E \oplus (W_r \oplus W_{r-1} \cdots \oplus W_1)$$

avec

$$(V_1 \oplus \cdots \oplus V_r)^\perp = (V_1 \oplus \cdots \oplus V_r) \oplus E$$

et pour $1 \leq i < r$,

$$(V_1 \oplus \cdots \oplus V_i)^\perp = (V_1 \oplus \cdots \oplus V_r) \oplus E \oplus (W_r \oplus \cdots \oplus W_{i+1}).$$

L'accouplement $\langle \dots \rangle$ sur E est non dégénéré et pour $1 \leq i \leq r$, il induit un accouplement parfait $V_i \times W_i \rightarrow \mathbb{Q}_p$. Si $1 \leq i \leq r$ et $g \in \text{GL}(V_i)$ on note $g^* \in \text{GL}(W_i)$ l'adjoint de g relativement à cet accouplement. Alors,

$$M = \prod_{i=1}^r \text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \text{GL}(V_i) \times \text{GU}(E, \langle \dots \rangle) \hookrightarrow \text{GU}(V, \langle \dots \rangle)$$

$$(g_1, \dots, g_r, h) \mapsto g_1 \oplus \dots \oplus g_r \oplus h \oplus c(h)(g_r^*)^{-1} \oplus \dots \oplus c(h)(g_1^*)^{-1}.$$

où $c(h) \in \mathbb{G}_m$ désigne le facteur de similitude de h et si $E = 0$ on note $\text{GU}(E, \langle \dots \rangle) = \mathbb{G}_m$.

Notons $\dim_F V_i = m_i$ et $\dim_F E = s$. On a alors

$$2 \sum_{i=1}^r m_i + s = n.$$

Si $E = 0$, n est pair et le morphisme de groupes

$$(M/M^{der})(\mathbb{Q}_p) \longrightarrow D(\mathbb{Q}_p)$$

s'identifie alors à

$$(F^\times)^r \times \mathbb{Q}_p^\times \longrightarrow \{(x, c) \in F^\times \times \mathbb{Q}_p^\times \mid N_{F/F_0}(x) = c^n\}$$

$$((y_1, \dots, y_r), c) \longmapsto (y_1/y_1^* \dots y_r/y_r^* c^{n/2}, c).$$

Il est surjectif. En effet, si $x \in F^\times$ et $c \in \mathbb{Q}_p^\times$ sont tels que $N_{F/F_0}(x) = c^n$ alors

$$N_{F/F_0}(xc^{-\frac{n}{2}}) = 1$$

et d'après le théorème de Hilbert 90 il existe $y \in F^\times$ tel que

$$y/y^* = xc^{-\frac{n}{2}}.$$

Si $E \neq 0$, le morphisme $(M/M^{der})(\mathbb{Q}_p) \longrightarrow D(\mathbb{Q}_p)$ s'identifie à

$$(F^\times)^r \times \{(z, c) \in F^\times \times \mathbb{Q}_p^\times \mid N_{F/F_0}(z) = c^s\} \longrightarrow \{(x, c) \in F^\times \times \mathbb{Q}_p^\times \mid N_{F/F_0}(x) = c^n\}$$

$$((y_1, \dots, y_r), (z, c)) \longmapsto (y_1/y_1^* \dots y_r/y_r^* . z . c^{m_1 + \dots + m_r}, c).$$

Si $s = n$ il est évidemment surjectif. Supposons donc que ce n'est pas le cas et que donc $r \neq 0$. Si $(x, c) \in F^\times \times \mathbb{Q}_p^\times$ sont tels que $N_{F/F_0}(x) = c^n$ alors

$$N_{F/F_0}(xc^{-(m_1 + \dots + m_r)}) = c^s.$$

On conclut que $(M/M^{der})(\mathbb{Q}_p) \longrightarrow D(\mathbb{Q}_p)$ est surjectif.

Puisque J^{der} est simplement connexe, d'après Kneser, $J(\mathbb{Q}_p) \rightarrow (J/J^{der})(\mathbb{Q}_p)$ est surjectif. On conclut donc au final que le composé

$$J(\mathbb{Q}_p) \longrightarrow (J/J^{der})(\mathbb{Q}_p) = (M/M^{der})(\mathbb{Q}_p) \longrightarrow D(\mathbb{Q}_p)$$

est surjectif. □

L'image de l'application naturelle

$$D(\mathbb{Q}_p) \longrightarrow \Delta = \mathbb{Z}$$

$$(x, c) \longmapsto v(c)$$

est \mathbb{Z} si n est pair et $2\mathbb{Z}$ si n est impair. La proposition 5.3.1 et le lemme 5.3.1 entraînent donc la proposition suivante.

Proposition 5.3.2. *L'image de l'application*

$$\varkappa : \check{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

est \mathbb{Z} si n est pair et $2\mathbb{Z}$ si n est impair.

Revenons au morphisme déterminant. On a

$$X_*(D) = \left\{ \sum_{\tau \in \tilde{I}_F} a_\tau[\tau] \mid a_\tau \in \mathbb{Z} \text{ et } \exists i \in \mathbb{Z} \forall \tau, a_\tau + a_{\tau^*} = in \right\}.$$

Soient $(p_\tau, q_\tau)_{\tau \in \tilde{I}_F}$ les signatures associées à la donnée de Rapoport-Zink (cf. 2.3). On a $p_\tau + q_\tau = n$ et $(p_{\tau^*}, q_{\tau^*}) = (q_\tau, p_\tau)$. Alors,

$$\det \tilde{\mu} = - \sum_{\tau \in \tilde{I}_F} p_\tau[\tau].$$

Soit

$$\mathcal{L}_{\tilde{\mu}}$$

le \mathcal{O}_F -système local sur $\mathrm{Sp}(\check{E})$ de la définition 4.2.1. Rappelons qu'il a pour fibre géométrique sur $\overline{\check{E}}$ le \mathcal{O}_F -module \mathcal{O}_F muni de l'action de Galois donnée par

$$\prod_{\tau \in \tilde{I}_F} \chi_{LT, \tau}^{p_\tau}.$$

Nous adptons la définition suivante.

Définition 5.3.1. Soit \mathcal{F} un \mathcal{O}_F -système local étale sur un espace rigide.

(1) On note $\mathcal{F}^{(*)}$ le \mathcal{O}_F -système local $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_F, *} \mathcal{O}_F$.

(2) On note

$$N_{F/F_0} \mathcal{F}$$

le \mathcal{O}_{F_0} -système local étale obtenu par descente des coefficients de \mathcal{O}_F à \mathcal{O}_{F_0} du \mathcal{O}_F -système local

$$\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathcal{F}^{(*)}$$

muni de sa donnée de descente canonique

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathcal{F}^{(*)} &\xrightarrow{\sim} (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathcal{F}^{(*)})^{(*)} = \mathcal{F}^{(*)} \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathcal{F} \\ x \otimes y &\longmapsto y \otimes x. \end{aligned}$$

Revenons au système local $\mathcal{L}_{\tilde{\mu}}$. Il y a une identification canonique

$$N_{F/F_0} \mathcal{L}_{\tilde{\mu}} = \mathcal{O}_{F_0}(n)$$

car

$$\begin{aligned} \prod_{\tau \in \tilde{I}_F} \chi_{LT, \tau}^{p_\tau} \cdot * \circ \prod_{\tau \in \tilde{I}_F} \chi_{LT, \tau}^{p_\tau} &= \prod_{\tau \in \tilde{I}_F} \chi_{LT, \tau}^{p_\tau} \prod_{\tau \in \tilde{I}_F} \chi_{LT, \tau^*}^{p_\tau} \\ &= \prod_{\tau \in \tilde{I}_F} \chi_{LT, \tau}^{p_\tau + p_{\tau^*}} \\ &= \prod_{\tau \in \tilde{I}_F} \chi_{LT, \tau}^n \\ &= \chi_{\mathrm{cycl}}^n. \end{aligned}$$

Définition 5.3.2. On note $(\det(\check{\mathcal{M}})_K)_{K \subset D(\mathbb{Q}_p)}$ la tour de \check{E} -espaces rigides définie par

$$\det(\check{\mathcal{M}})_K = \prod_{\mathrm{Im} \varkappa} Y_m/K \text{ pour } m \gg 0$$

où $Y_m = \{(\eta, \eta_c)\}$ avec

- $\eta \in \underline{\mathrm{Isom}}_{\mathcal{O}_F}(\mathcal{O}_F/p^m \mathcal{O}_F, \mathcal{L}_{\tilde{\mu}} \otimes \mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z})$,
- $\eta_c \in \underline{\mathrm{Isom}}(\mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z}(1))$,
- via l'identification $N_{F/F_0} \mathcal{L}_{\tilde{\mu}} = \mathcal{O}_{F_0}(n)$ on a

$$N_{F/F_0} \eta = \eta_c^{\otimes n} \otimes \mathrm{Id}$$

où

$$\eta_c^{\otimes n} \in \underline{\mathrm{Isom}}(\mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z}(n))$$

et

$$\eta_c^{\otimes n} \otimes \text{Id} \in \text{Isom}_{\mathcal{O}_{F_0}}(\mathcal{O}_{F_0}/p^m \mathcal{O}_{F_0}, \mathcal{O}_{F_0}/p^m \mathcal{O}_{F_0}(n)),$$

– $(x, c) \in F^\times \times \mathbb{Q}_p^\times$ vérifiant $(x, c) \in K$ agit sur Y_m via $(\eta, \eta_c).(x, c) = (x\eta, c\eta_c)$.

On munit $\det(\check{\mathcal{M}})_K$ de l'action de $D(\mathbb{Q}_p) \times D(\mathbb{Q}_p)$ suivante. Pour $((x, c), (x', c')) \in (F^\times \times \mathbb{Q}_p^\times)^2$ vérifiant $N_{F/F_0}(x) = c^n$ et $N_{F/F_0}(x') = c'^n$, si $(\eta, \eta_c) \in \det(\check{\mathcal{M}})_K$ est dans la composante indexée par $\delta \in \text{Im } \varkappa \subset \mathbb{Z}$ on pose

$$((x, c), (x', c')).(\eta, \eta_c) = (p^{-v_p(x)-v_p(x')}xx'.\eta, p^{-v_p(c)-v_p(c')}cc'.\eta_c)$$

dans la composante indexée par $\delta + v_p(c) + v_p(c')$.

Enfin on définit l'application $\varkappa : \det(\check{\mathcal{M}})_K \rightarrow \Delta$ qui sur la composante indexée par $\delta \in \mathbb{Z}$ vaut δ . Il existe aussi une donnée de descente sur $\det(\check{\mathcal{M}})_K$ comme dans la section 4.2.2.

Voici maintenant l'analogie de la proposition 4.3.1.

Proposition 5.3.3. Soit $(\check{\mathcal{M}}(D, \det \tilde{\mu}))_K$ la tour d'espaces de Rapoport-Zink associée à la donnée torique $(D, \det \tilde{\mu})$ et $\varkappa_{D, \tilde{\mu}} : \check{\mathcal{M}}(D, \tilde{\mu}) \rightarrow \Delta$ (cf. section 3). Il y a alors un isomorphisme $D(\mathbb{Q}_p) \times D(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant de tours

$$(\det(\check{\mathcal{M}})_K)_K \xrightarrow{\sim} (\check{\mathcal{M}}(D, \det \tilde{\mu}))_K$$

tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \det(\check{\mathcal{M}})_K & \longrightarrow & \check{\mathcal{M}}(D, \det \tilde{\mu})_K \\ & \searrow \varkappa & \swarrow \varkappa_{D, \tilde{\mu}} \\ & \Delta & \end{array}$$

De plus, cet isomorphisme est compatible à la donnée de descente.

Démonstration. Fixons un isomorphisme $\mathbb{Z}_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p(1)$. On identifie donc la fibre de $\mathbb{Z}_p(1)$ sur le point géométrique donné par \overline{E} à \mathbb{Z}_p muni de l'action donnée par le caractère cyclotomique.

On a

$$\det(\check{\mathcal{M}})_K(\overline{E}) = \prod_{\text{Im } \varkappa} \{(\eta, \eta_c) \mid N_{F/F_0}\eta = \eta_c \otimes \text{Id}\}/K$$

où

$$\begin{aligned} \eta &\in \text{Isom}_{\mathcal{O}_F}(\mathcal{O}_F/p^m \mathcal{O}_F, \mathcal{O}_F/p^m \mathcal{O}_F) = (\mathcal{O}_F/p^m \mathcal{O}_F)^\times, \\ \eta_c &\in \text{Isom}(\mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z}(1)) = (\mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z})^\times \end{aligned}$$

vérifient

$$N_{F/F_0}(\eta) = \eta_c^n.$$

Un tel couple (η, η_c) définit donc un élément $(\eta, \eta_c) \in D(\mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z})$ (le tore D étant non-ramifiée on note encore D pour son modèle entier canonique sur \mathbb{Z}_p). La classe de (η, η_c) modulo K définit un élément

$$(\eta, \eta_c).K \in D(\mathbb{Z}_p)/K.$$

Si $(\eta, \eta_c).K$ est dans la composante de $\det(\check{\mathcal{M}})_K(\overline{E})$ indexée par $\delta \in \text{Im } \varkappa$, en translatant par $(p^{\frac{n\delta}{2}}, p^\delta) \in D(\mathbb{Q}_p)$ (ce qui a un sens grâce à la proposition 5.3.2) on lui associe l'élément

$$(p^{\frac{n\delta}{2}}, p^\delta)(\eta, \eta_c).K \in D(\mathbb{Q}_p)/K.$$

Cela définit une bijection

$$\det(\check{\mathcal{M}})_K(\overline{E}) \xrightarrow{\sim} \check{\mathcal{M}}(D, \det \tilde{\mu})(\overline{E})$$

dont on vérifie comme dans la proposition 4.3.1 qu'elle est compatible à l'action de I_E et de $D(\mathbb{Q}_p) \times D(\mathbb{Q}_p)$, et à la donnée de descente. \square

Soit \mathcal{T}_K le \mathcal{O}_F -système local étale sur $\check{\mathcal{M}}_K$ qui est le module de Tate de la déformation universelle. La polarisation universelle normalisée comme dans la section 5.1 munie \mathcal{T}_K d'un produit hermitien

$$\mathcal{T}_K \times \mathcal{T}_K \longrightarrow \mathbb{Z}_p(1)$$

qui induit un isomorphisme

$$\mathcal{T}_K \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}_K^{\vee(*)}(1).$$

Appliquant $\det_{\mathcal{O}_F}$ à cet isomorphisme on obtient un isomorphisme de systèmes locaux de rang 1

$$\det_{\mathcal{O}_F} \mathcal{T}_K \simeq (\det_{\mathcal{O}_F} \mathcal{T}_K)^{\vee(*)}(n)$$

soit encore un isomorphisme

$$N_{F/F_0} \det_{\mathcal{O}_F} \mathcal{T}_K \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{F_0}(n).$$

Venons en au théorème principal analogue du théorème 4.4.2. On note encore $\mathcal{L}_{\bar{\mu}}$ pour le tiré en arrière de $\mathcal{L}_{\bar{\mu}}$ sur $\check{\mathcal{M}}_K$.

Théorème 5.3.1. *Pour tout $K \subset G(\mathbb{Z}_p)$, il existe un isomorphisme de \mathcal{O}_F -systèmes locaux étales sur $\check{\mathcal{M}}_K$*

$$u_K : \det_{\mathcal{O}_F} \mathcal{T}_K \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{\bar{\mu}}$$

vérifiant :

(1) *Le diagramme suivant commute*

$$\begin{array}{ccc} N_{F/F_0} \det_{\mathcal{O}_F} \mathcal{T}_K & \xrightarrow[\sim]{N_{F/F_0} u_K} & N_{F/F_0} \mathcal{L}_{\bar{\mu}} \\ & \searrow \simeq & \swarrow \simeq \\ & \mathcal{O}_{F_0}(n) & \end{array}$$

où la flèche diagonale de gauche est induite par la polarisation de la déformation universelle et celle de droite résulte de l'égalité de caractères $N_{F/F_0} \circ \prod_{\tau} \chi_{LT, \tau}^{p_{\tau}} = \chi_{cycl}^n$.

(2) *Si $K' \subset K$, via le morphisme de changement de niveau $\pi_{K', K} : \check{\mathcal{M}}_{K'} \rightarrow \check{\mathcal{M}}_K$ et l'identification canonique $\pi_{K', K}^* \mathcal{T}_K = \mathcal{T}_{K'}$ on a*

$$\pi_{K', K}^* u_K = u_{K'}.$$

(3) *Si $g \in J(\mathbb{Q}_p)$, qui définit l'automorphisme $g : \check{\mathcal{M}}_K \xrightarrow{\sim} \check{\mathcal{M}}_K$, via l'identification canonique $g^* \mathcal{T}_K = \mathcal{T}_K$ l'isomorphisme*

$$\det \mathcal{T}_K = g^* \det \mathcal{T}_K \xrightarrow{g^* u_K} g^* f_K^* \mathcal{L}_{\bar{\mu}} = f_K^* \mathcal{L}_{\bar{\mu}}$$

est égal à

$$(p^{-v_p(\det g)} \det_F(g)) u_K.$$

(4) *Si $g \in G(\mathbb{Q}_p)$ est tel que $g^{-1}Kg \subset \text{Aut}(\Lambda_0)$ et $\Lambda_0 \subset g.\Lambda_0$, si $g : \check{\mathcal{M}}_K \xrightarrow{\sim} \check{\mathcal{M}}_{g^{-1}Kg}$, via le morphisme canonique*

$$\mathcal{T}_K \longrightarrow g^* \mathcal{T}_{g^{-1}Kg},$$

le morphisme composé

$$\det \mathcal{T}_K \longrightarrow g^* \det \mathcal{T}_{g^{-1}Kg} \xrightarrow{g^* u_{g^{-1}Kg}} g^* f_{g^{-1}Kg}^* \mathcal{L}_{\bar{\mu}} = f_K^* \mathcal{L}_{\bar{\mu}}$$

est égal à

$$p^{-v_p(\det_F g)} u_K.$$

(5) *Soit $\alpha : \check{\mathcal{M}}_K \rightarrow \sigma_E^* \check{\mathcal{M}}_K$ la donnée de descente de Rapoport-Zink. Via les isomorphismes canoniques*

$$\mathcal{T}_K = \alpha^* \sigma_E^* \mathcal{T}_K \text{ et } \sigma_E^* \mathcal{L}_{\bar{\mu}} = \mathcal{L}_{\bar{\mu}},$$

le morphisme composé

$$\det \mathcal{T}_K = \alpha^* \sigma_E^* \det \mathcal{T}_K \xrightarrow{\alpha^* \sigma_E^* u_K} \alpha^* \sigma_E^* f_K^* \mathcal{L}_{\bar{\mu}} = f_K^* \sigma_E^* \mathcal{L}_{\bar{\mu}} = f_K^* \mathcal{L}_{\bar{\mu}}$$

est égal à u_K .

Démonstration. Après oubli du produit symplectique, la donnée de Rapoport-Zink de type PEL $(F, *, V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \bar{b}, \bar{\mu})$ dont on est parti fournit une donnée de type EL $(F, V, \bar{b}, \bar{\mu})$. Il lui correspond un espace de Rapoport-Zink de type EL. Le morphisme oubli de la polarisation définit un morphisme de l'espace de type PEL vers l'espace de type EL. Ce morphisme est équivariant via les morphismes naturels des groupes G et J associés à la donnée de type PEL vers ceux associés à la donnée de type EL. Tirant en arrière les isomorphismes du théorème 4.4.2 de la tour de Rapoport-Zink de type EL vers celle de type PEL on obtient la construction des $(u_K)_K$ vérifiant les propriétés (2), (3), (4) et (5). Il reste à vérifier la propriété (1) faisant intervenir la polarisation. En reprenant la preuve du théorème 4.4.2 dans la section 4.7, on vérifie que cette propriété est une conséquence de la compatibilité de l'isomorphisme de périodes du théorème à la dualité de Cartier. \square

Comme dans le cas EL on en déduit le théorème suivant.

Théorème 5.3.2. *Via le morphisme $(\det, \det) : J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p) \rightarrow D(\mathbb{Q}_p) \times D(\mathbb{Q}_p)$ il existe un morphisme $J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant de tours d'espaces rigides*

$$(\check{\mathcal{M}}_K)_K \longrightarrow (\det(\check{\mathcal{M}}_K)_K)_K$$

où K parcourt les sous-groupes ouverts de $G(\mathbb{Z}_p)$. Ce morphisme composé avec l'application canonique $\det(\check{\mathcal{M}})_{\det K} \rightarrow \Delta$ coïncide avec l'application $\varkappa : \check{\mathcal{M}}_K \rightarrow \Delta$. De plus, ce morphisme est compatible à la donnée de descente de Rapoport-Zink.

6. INTERPRÉTATION EN TERMES DE SYSTÈMES LOCAUX SUR L'ESPACE DES PÉRIODES

6.1. Rappels sur le morphisme de périodes et les \mathbb{Q}_p -systèmes locaux de de Jong. Considérons une donnée de Rapoport-Zink locale non-ramifiée simple de type EL ou PEL. Soit G le groupe réductif associé. Rappelons qu'on a fixé une classe de conjugaison de cocaractère

$$\bar{\mu} : \mathbb{G}_m \overline{\mathbb{Q}}_p \longrightarrow G_{\overline{\mathbb{Q}}_p}.$$

On dispose également d'une classe de σ -conjugaison $\bar{b} \in B(G)$ et $J(\mathbb{Q}_p)$ est le σ -centralisateur de b . Enfin on a fixé un réseau (autodual dans le cas PEL) dans l'espace vectoriel V ce qui définit un modèle entier réductif de G que l'on note de la même façon. En particulier, $G(\mathbb{Z}_p)$ est un sous-groupe compact de $G(\mathbb{Q}_p)$.

Dans cette section on considère la tour d'espaces de Rapoport-Zink non plus comme une tour d'espaces rigides au sens de Tate mais d'espaces analytiques au sens de Berkovich ([Ber90], [Ber93]). Ainsi, si $\check{\mathcal{M}}^{an}$ désigne la fibre générique de $\check{\mathcal{M}}$ comme \check{E} -espace analytique de Berkovich ([Ber96]) on note

$$(\check{\mathcal{M}}_K)_{K \subset G(\mathbb{Z}_p)} \longrightarrow \check{\mathcal{M}}^{an}$$

la tour de revêtements de l'espace analytique $\check{\mathcal{M}}^{an}$. Soit $\check{\mathcal{F}}^{an}$ l'espace des périodes de Rapoport-Zink ([RZ96] chapitre 1). Il s'agit de l'espace homogène des sous-groupes paraboliques de type $\bar{\mu}$ de $G_{\check{E}}$. Plus précisément, on voit $\check{\mathcal{F}}^{an}$ comme \check{E} -espace analytique de Berkovich i.e. c'est l'analytifié de la variété algébrique sur \check{E} qui est l'espace homogène précédent. Rappelons que $L = \check{E}$ (2.4.1) et que

$$J(\mathbb{Q}_p) = \{g \in G(L) \mid gb\sigma = b\sigma g \text{ dans } G(L) \rtimes \langle \sigma \rangle\}.$$

On a donc $J(\mathbb{Q}_p) \hookrightarrow G(\check{E})$ qui agit donc sur $\check{\mathcal{F}}^{an}$.

Rapoport et Zink ont construit dans le chapitre 5 de [RZ96] un morphisme de périodes

$$\check{\pi} : \check{\mathcal{M}}^{an} \longrightarrow \check{\mathcal{F}}^{an}.$$

Celui-ci généralise le morphisme de périodes de Gross-Hopkins pour les espaces de Lubin-Tate ([GH94]). C'est un morphisme $J(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant. Il est étale au sens des espaces rigides ([RZ96] prop. 5.17) et même étale comme morphisme d'espaces analytiques de Berkovich ([Far04] lemme 2.3.24). Il s'en suit que l'image de $\check{\pi}$ est un ouvert de $\check{\mathcal{F}}^{an}$.

Définition 6.1.1. *On note $\check{\mathcal{F}}^a$ l'ouvert de $\check{\mathcal{F}}^{an}$ qui est l'image du morphisme de périodes. On l'appelle le lieu admissible.*

C'est un ouvert $J(\mathbb{Q}_p)$ -invariant dans $\check{\mathcal{F}}^{an}$. Dire que le morphisme de périodes est étale au sens de Berkovich signifie que tout $x \in \check{\mathcal{M}}^{an}$ possède un voisinage ouvert U tel que $\check{\pi} : U \rightarrow \check{\pi}(U)$ soit étale fini. Dans [dJ95b] de Jong définit une notion de revêtements étales d'espaces analytiques de Berkovich et démontre le théorème suivant.

Théorème 6.1.1 (de Jong [dJ95b]). *Le morphisme de périodes est un revêtement étale au sens de de Jong, c'est à dire tout point de $\check{\mathcal{F}}^a$ possède un voisinage ouvert U tel que $\check{\pi}^{-1}(U)$ soit une union disjointe d'ouverts étales finis sur U .*

Dans [dJ95b] ce théorème est explicitement démontré dans le cas de l'espace de Lubin-Tate car dans ce cas là on sait d'après Gross et Hopkins ([GH94]) que $\check{\mathcal{F}}^a$ est l'espace projectif tout entier. Cependant, les résultats de [dJ95b] montrent le théorème plus général tel que cité précédemment. Le morphisme de périodes est invariant sous l'action de $G(\mathbb{Q}_p)$ au sens où si $K \subset G(\mathbb{Z}_p)$ et $g \in G(\mathbb{Q}_p)$ sont tels que $g^{-1}Kg \subset G(\mathbb{Z}_p)$ alors le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \check{\mathcal{M}}_K & \xrightarrow[\sim]{g} & \check{\mathcal{M}}_{g^{-1}Kg} \\
 \swarrow & & \searrow \\
 \check{\mathcal{M}}^{an} & & \check{\mathcal{M}}^{an} \\
 \searrow \check{\pi} & & \swarrow \check{\pi} \\
 & \check{\mathcal{F}}^a &
 \end{array}$$

De plus, les fibres de $\check{\pi}$ sont exactement les orbites de Hecke (cf. [RZ96] Prop. 5.37). Le théorème 6.1.1 précédent affirme donc en quelque sortes que les correspondances de Hecke agissent « de façon proprement discontinue » sur la tour de Rapoport-Zink.

De Jong définit également une notion de \mathbb{Q}_p -système local sur les espaces analytiques de Berkovich ([dJ95b] def. 4.1). Nous notons

$$\mathbb{Q}_p\text{-Loc}_X$$

la catégorie des \mathbb{Q}_p -systèmes locaux sur X . Si \bar{x} est un point géométrique de X , il définit un groupe fondamental que nous notons

$$\pi_1^{dJ}(X, \bar{x}).$$

Notons

$$\text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(\pi_1^{dJ}(X, x))$$

la catégorie des représentations continues de ce groupe topologique dans des \mathbb{Q}_p -espaces vectoriels de dimension finie. Il y a un foncteur

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{Q}_p\text{-Loc}_X & \longrightarrow & \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(\pi_1^{dJ}(X, \bar{x})) \\
 \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E}_{\bar{x}}
 \end{array}$$

où la fibre $\mathcal{E}_{\bar{x}}$ est munie d'une représentation de monodromie de $\pi_1^{dJ}(X, \bar{x})$. Lorsque X est connexe le foncteur précédent induit une équivalence de catégories.

Si on note $\pi_1(X, \bar{x})$ le groupe profini classifiant les revêtements étales *finis* de X (qui est noté π_1^{alg} dans [dJ95b]), il existe un morphisme continu

$$\pi_1^{dJ}(X, \bar{x}) \longrightarrow \pi_1(X, \bar{x})$$

déduit de ce que tout revêtement étale fini est un revêtement étale au sens de de Jong. Si \mathcal{F} est un \mathbb{Z}_p -système local au sens de la définition 2.6 il définit une représentation de monodromie

$$\pi_1(X, \bar{x}) \longrightarrow \text{GL}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{F}_{\bar{x}}).$$

Alors, $\mathcal{F} \otimes \mathbb{Q}_p \in \mathbb{Q}_p\text{-Loc}_X$ et sa représentation de monodromie est donnée par le composé

$$\pi_1^{dJ}(X, \bar{x}) \longrightarrow \pi_1(X, \bar{x}) \longrightarrow \text{GL}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{F}_{\bar{x}}) \hookrightarrow \text{GL}_{\mathbb{Q}_p}(\mathcal{F}_{\bar{x}} \otimes \mathbb{Q}_p).$$

Revenons aux espaces de Rapoport-Zink. Soit \mathcal{T} le \mathbb{Z}_p -système local sur $\check{\mathcal{M}}^{an}$ qui est le module de Tate de la déformation universelle X^{univ} . Si \bar{x} est un point géométrique de $\check{\mathcal{M}}^{an}$ la représentation de monodromie associée est une représentation

$$\pi_1(\check{\mathcal{M}}^{an}, \bar{x}) \longrightarrow \text{GL}_{\mathbb{Z}_p}(T_p(X_{\bar{x}}^{\text{univ}})).$$

Soit

$$\mathcal{V} = \mathcal{T} \otimes \mathbb{Q}_p$$

le \mathbb{Q}_p -système local module de Tate rationnel. Notons \mathcal{V}_K le tiré en arrière de \mathcal{V} en niveau K sur $\check{\mathcal{M}}_K$ pour $K \subset G(\mathbb{Z}_p)$. Comme expliqué dans la section 2.7, la famille de systèmes locaux

$$(\mathcal{V}_K)_{K \subset G(\mathbb{Z}_p)}$$

forme alors un \mathbb{Q}_p -système local $J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant sur la tour $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$. Cela signifie que :

- si $K' \subset K$ et $\pi_{K',K} : \check{\mathcal{M}}_{K'} \rightarrow \check{\mathcal{M}}_K$ il existe un isomorphisme

$$\pi_{K',K}^* \mathcal{V}_K \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}_{K'},$$

- si $(g_1, g_2) \in J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p)$, $K \subset G(\mathbb{Z}_p)$ et $g_2^{-1}Kg_2 \subset G(\mathbb{Z}_p)$, via $(g_1, g_2) : \check{\mathcal{M}}_K \xrightarrow{\sim} \check{\mathcal{M}}_{g_2^{-1}Kg_2}$ il existe un isomorphisme

$$(g_1, g_2)^* \mathcal{V}_{g_2^{-1}Kg_2} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}_K,$$

- les isomorphismes précédents vérifient les relations de compatibilité et de cocycle naturelles auxquelles on s'attend.

Définition 6.1.2. *On note*

$$\mathbb{Q}_p\text{-}\mathcal{L}oc_{(\check{\mathcal{M}}_K)_K/J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p)}$$

la catégorie de tels \mathbb{Q}_p -systèmes locaux $J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p)$ -équivariants sur la tour de Rapoport-Zink. On note

$$\mathbb{Q}_p\text{-}\mathcal{L}oc_{\check{\mathcal{F}}^a/J(\mathbb{Q}_p)}$$

la catégorie des \mathbb{Q}_p -systèmes locaux $J(\mathbb{Q}_p)$ -équivariants sur le lieu admissible.

On a un foncteur naturel :

$$\check{\pi}^* : \mathbb{Q}_p\text{-}\mathcal{L}oc_{\check{\mathcal{F}}^a/J(\mathbb{Q}_p)} \rightarrow \mathbb{Q}_p\text{-}\mathcal{L}oc_{(\check{\mathcal{M}}_K)_K/J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p)}$$

C'est probable que $\check{\pi}^*$ est une équivalence de catégories. Par exemple, Fargues a démontré dans [Far08] Prop. IV.11.20 que $\check{\pi}^*$ induit une équivalence de catégories entre faisceaux sur l'espace des périodes et faisceaux cartésiens sur la tour pour l'espace de Lubin-Tate.

De Jong démontre grâce au théorème 6.1.1 que le système local module de Tate rationnel $(\mathcal{V}_K)_K$ descend en un \mathbb{Q}_p -système local $J(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant \mathcal{E} sur $\check{\mathcal{F}}^a$. En termes de représentations de monodromie, après oubli de l'action de $J(\mathbb{Q}_p)$, cela se traduit de la façon suivante. Soit $\bar{x} \in \check{\mathcal{M}}^{an}$ un point géométrique et $\bar{y} = \check{\pi}(\bar{x})$. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_1^{dJ}(\check{\mathcal{M}}^{an}, \bar{x}) & \longrightarrow & \pi_1(\check{\mathcal{M}}^{an}, \bar{x}) \longrightarrow \text{GL}_{\mathbb{Z}_p}(T_p(X_{\bar{x}}^{\text{univ}})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1^{dJ}(\check{\mathcal{F}}^a, \bar{y}) & \longrightarrow & \text{GL}_{\mathbb{Q}_p}(V_p(X_{\bar{y}}^{\text{univ}})) \end{array}$$

où la représentation de monodromie de la ligne du bas définit le \mathbb{Q}_p -système local \mathcal{E} . Le fait que le système local module de Tate rationnel descende à $\check{\mathcal{F}}^a$ se traduit donc en ce que la représentation de monodromie $\pi_1(\check{\mathcal{M}}^{an}, \bar{x}) \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{Z}_p}(V_p(X_{\bar{x}}^{\text{univ}}))$ composée avec $\pi_1^{dJ}(\check{\mathcal{M}}^{an}, \bar{x}) \rightarrow \pi_1(\check{\mathcal{M}}^{an}, \bar{x})$ descend en une représentation de monodromie du groupe fondamental de de Jong de $\check{\mathcal{F}}^a$.

6.2. Traduction des résultats en termes de systèmes locaux sur l'espace des périodes.

Définition 6.2.1. Soit H un groupe algébrique sur \mathbb{Q}_p . Un H -système local $J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant sur la tour $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$ est un tenseur foncteur exact

$$\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(H) \longrightarrow \mathbb{Q}_p\text{-}\mathcal{L}oc_{(\check{\mathcal{M}}_K)_K/J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p)}.$$

On note $H\text{-}\mathcal{L}oc_{(\check{\mathcal{M}}_K)_K/J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p)}$ cette catégorie.

Un H -système local $J(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant sur $\check{\mathcal{F}}^a$ est un tenseur foncteur exact

$$\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(H) \longrightarrow \mathbb{Q}_p\text{-}\mathcal{L}oc_{\check{\mathcal{F}}^a/J(\mathbb{Q}_p)}.$$

On note $H\text{-}\mathcal{L}oc_{\check{\mathcal{F}}^a/J(\mathbb{Q}_p)}$ cette catégorie.

Le foncteur $\check{\pi}^*$ induit un foncteur

$$\check{\pi}^* : H\text{-}\mathcal{L}oc_{\check{\mathcal{F}}^a/J(\mathbb{Q}_p)} \rightarrow H\text{-}\mathcal{L}oc_{(\check{\mathcal{M}}_K)_K/J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p)}.$$

Si $f : H \rightarrow H'$ est un morphisme de groupes algébriques il induit par composition avec $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p} H' \rightarrow \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p} H$ un foncteur évident f_* des H -systèmes locaux équivariants vers les H' -systèmes locaux équivariants au sens précédent.

Le système local équivariant module de Tate rationnel $(\mathcal{V}_K)_K$ sur $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$ est un G -système local. Pour précisément, soit $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ une \mathbb{Q}_p -représentation de G . On définit un \mathbb{Q}_p -système local sur la tour $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$ associé à ρ via le foncteur $(\mathcal{V}_K)_K$ comme suit : La représentation provient d'une \mathbb{Z}_p -représentation algébrique de $G_{\mathbb{Z}_p}$ qu'on note encore $\rho : G_{\mathbb{Z}_p} \rightarrow \mathrm{GL}(M)$, où M est un \mathbb{Z}_p -réseau dans V . Posons $K_n := \mathrm{Ker}(G(\mathbb{Z}_p) \rightarrow G(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}))$. Alors $\check{\mathcal{M}}_{K_n}$ est un $G(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ -torseur sur $\check{\mathcal{M}}^{an}$. Si on note $\rho_n : G(\mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p) \rightarrow \mathrm{GL}(M/p^nM)$, le poussé en avant de ce toseur $(\rho_n)_*\check{\mathcal{M}}_{K_n}$ est un $\mathrm{GL}(M/p^nM)$ -torseur sur $\check{\mathcal{M}}^{an}$. Alors

$$\mathcal{T}_{\rho_n} := (\rho_n)_*\check{\mathcal{M}}_{K_n} \times_{\mathrm{GL}(M/p^nM)} M/p^nM$$

est un faisceau étale de $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ -modules sur $\check{\mathcal{M}}^{an}$. De plus ils sont compatibles lorsque n varie. Donc $(\mathcal{T}_{\rho_n})_{n \geq 1}$ forment un \mathbb{Z}_p -système local sur $\check{\mathcal{M}}^{an}$. Soit

$$(\mathcal{T}_{\rho_n})_n \otimes \mathbb{Q}_p$$

le \mathbb{Q}_p -système local sur $\check{\mathcal{M}}^{an}$ associé à $(\mathcal{T}_{\rho_n})_{n \geq 1}$. Alors cela ne dépend pas de réseau M choisi. La tiré en arrière de $(\mathcal{T}_{\rho_n})_n \otimes \mathbb{Q}_p$ sur la tour $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$ définit un \mathbb{Q}_p -système local $J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant sur la tour $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$. On le définit comme l'image de (V, ρ) via le foncteur $(\mathcal{V}_K)_K$.

D'après de Jong, le système local $(\mathcal{V}_K)_K$ descend en un G -système local $J(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant \mathcal{E} sur $\check{\mathcal{F}}^a$ que l'on note de la même façon :

$$\mathcal{E} \in G\text{-}\mathcal{L}oc_{\check{\mathcal{F}}^a/J(\mathbb{Q}_p)}.$$

Notons D le cocentre de G et $\det : G \rightarrow D$ le morphisme quotient. On note $\det \tilde{\mu} \in X_*(D)$. Rappelons (cf. fin de la section 3.4) que $\tilde{\mu}$ définit un D -système local

$$\mathcal{L}_{\tilde{\mu}} \in D\text{-}\mathcal{L}oc_{\mathrm{Sp}(\check{E})}.$$

Les résultats des sections précédentes se traduisent alors de la façon suivante.

Théorème 6.2.1. Soit $\mathcal{E} \in G\text{-}\mathcal{L}oc_{\check{\mathcal{F}}^a/J(\mathbb{Q}_p)}$ le G -système local $J(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant sur le lieu admissible de l'espace des périodes associé à un espace de Rapoport-Zink de type EL non-ramifié simple ou PEL non-ramifié simple unitaire ou symplectique. Soit $f : \check{\mathcal{F}}^a \rightarrow \mathrm{Sp}(\check{E})$ le morphisme structural. Soit $\det : G \rightarrow D$ le morphisme de G vers son cocentre. Il y a alors un isomorphisme

$$\det_* \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} f^* \mathcal{L}_{\tilde{\mu}} \in D\text{-}\mathcal{L}oc_{\check{\mathcal{F}}^a/J(\mathbb{Q}_p)}$$

où la structure $J(\mathbb{Q}_p)$ -équivariante sur $f^* \mathcal{L}_{\tilde{\mu}}$ est donnée par : l'action de $g \in J(\mathbb{Q}_p)$ est la multiplication par $\det(g) \in D(\mathbb{Q}_p)$.

6.3. Application aux représentations de monodromie. Soit X un espace analytique de Berkovich, H un groupe algébrique sur \mathbb{Q}_p , \mathcal{F} un H -système local sur X et \bar{x} un point géométrique de X . Considérons le composé

$$\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p} H \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathbb{Q}_p\text{-Loc}_X \longrightarrow \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(\pi_1^{dJ}(X, \bar{x}))$$

où la flèche de droite est le foncteur fibre en \bar{x} . Composé avec le foncteur fibre canonique

$$\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(\pi_1^{dJ}(X, \bar{x})) \longrightarrow \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}_p}$$

le foncteur obtenu est un foncteur fibre sur $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p} H$. Fixons un isomorphisme entre ce foncteur fibre et le foncteur fibre canonique sur $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p} H$. Cela définit une représentation de monodromie continue

$$\pi_1^{dJ}(X, \bar{x}) \longrightarrow H(\mathbb{Q}_p).$$

Un choix différent d'isomorphisme entre foncteurs fibres sur $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p} H$ fournit une représentation conjuguée par un élément de $H(\mathbb{Q}_p)$. Ainsi, à un H -système local sur X est associé canoniquement une classe de $H(\mathbb{Q}_p)$ -conjugaison de morphismes continus

$$\pi_1^{dJ}(X, \bar{x}) \longrightarrow H(\mathbb{Q}_p).$$

Revenons à nos espaces de Rapoport-Zink. Soit \bar{x} un point géométrique de $\check{\mathcal{M}}^{an}$. Fixons un réseau Λ_0 dans l'espace vectoriel V associé à la donnée de Rapoport-Zink. Dans le cas PEL on suppose ce réseau autodual. On note encore G pour le modèle entier réductif de G associé à ce réseau. Il y a associé à ce choix de réseau une classe de $G(\mathbb{Z}_p)$ -conjugaison de morphisme continu

$$\pi_1(\check{\mathcal{M}}^{an}, \bar{x}) \longrightarrow G(\mathbb{Z}_p).$$

Le choix d'un élément dans cette classe de $G(\mathbb{Z}_p)$ -conjugaison consiste à fixer un isomorphisme compatible aux structures additionnelles $\Lambda_0 \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}_{\bar{x}}$. Notons $\bar{y} = \check{\pi}(\bar{x})$. Il y a alors un diagramme commutatif à $G(\mathbb{Q}_p)$ -conjugaison près

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1^{dJ}(\check{\mathcal{M}}^{an}, \bar{x}) & \longrightarrow & \pi_1(\check{\mathcal{M}}^{an}, \bar{x}) & \longrightarrow & G(\mathbb{Z}_p) \\ \check{\pi}_* \downarrow & & & & \downarrow \\ \pi_1^{dJ}(\check{\mathcal{F}}^a, \bar{y}) & \longrightarrow & & \longrightarrow & G(\mathbb{Q}_p) \end{array}$$

où le morphisme du bas est la classe de $G(\mathbb{Q}_p)$ -conjugaison de morphisme associée à $\mathcal{E} \in G\text{-Loc}_{\check{\mathcal{F}}^a}$ via la discussion précédente au début de cette section. Rappelons (def. 3.1.1) que l'on a défini un morphisme

$$\chi_{\det \bar{\mu}} : \mathrm{Gal}(\bar{E}|\check{E}) = I_E \longrightarrow D(\mathbb{Z}_p).$$

Supposons maintenant que $\bar{x} \in \check{\mathcal{M}}(\bar{E})$. Si $f : \check{\mathcal{M}}^{an} \rightarrow \mathrm{Sp}(\check{E})$, il existe un morphisme

$$\pi_1(\check{\mathcal{M}}^{an}, \bar{x}) \longrightarrow \pi_1(\mathrm{Sp}(\check{E}), f(\bar{x})) = I_E.$$

Il y a de même un morphisme

$$\pi_1^{dJ}(\check{\mathcal{F}}^a, \bar{y}) \longrightarrow I_E.$$

Les résultats précédents impliquent le théorème suivant.

Théorème 6.3.1. *Les composés*

$$\pi_1(\check{\mathcal{M}}^{an}, \bar{x}) \longrightarrow G(\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\det} D(\mathbb{Z}_p)$$

et

$$\pi_1^{dJ}(\check{\mathcal{F}}^a, \bar{y}) \longrightarrow G(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\det} D(\mathbb{Q}_p)$$

sont donnés via le morphisme canonique vers I_E par $\chi_{\det \bar{\mu}} : I_E \rightarrow D(\mathbb{Z}_p)$.

Remarque 6.3.1. *Le théorème précédent est plus faible que le théorème 6.2.1 car il ne tient pas compte de la structure $J(\mathbb{Q}_p)$ -équivariante. Le groupe $J(\mathbb{Q}_p)$ ne stabilisant pas en général de point $\bar{x} \in \check{\mathcal{M}}^{an}(\bar{E})$, il n'est pas possible de formuler la totalité du théorème 6.2.1 en termes de représentations de monodromie. Cela est seulement possible après oubli de l'action de $J(\mathbb{Q}_p)$.*

Notons le corollaire suivant qui n'était pas à priori évident.

Corollaire 6.3.1. *Le morphisme $\pi_1^{dJ}(\check{\mathcal{F}}^a, \bar{y}) \rightarrow G(\mathbb{Q}_p)$ est à valeurs dans $G(\mathbb{Q}_p)^1$, où $G(\mathbb{Q}_p)^1 := \{x \in G(\mathbb{Q}_p) \mid \det x \in D(\mathbb{Z}_p)\}$.*

Notons \mathbb{C}_p le complété de \bar{E} . Regardons maintenant les représentations de monodromie géométriques.

Corollaire 6.3.2.

(1) *Le morphisme*

$$\pi_1(\check{\mathcal{M}}^{an} \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \bar{x}) \longrightarrow G(\mathbb{Z}_p)$$

est à valeurs dans $G^{der}(\mathbb{Z}_p)$.

(2) *Le morphisme*

$$\pi_1^{dJ}(\check{\mathcal{F}}^a \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \bar{y}) \longrightarrow G(\mathbb{Q}_p)$$

est à valeurs dans $G^{der}(\mathbb{Q}_p)$.

RÉFÉRENCES

- [Ber90] Vladimir G. Berkovich. *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, volume 33 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.
- [Ber93] Vladimir G. Berkovich. Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (78) :5–161 (1994), 1993.
- [Ber96] Vladimir G. Berkovich. Vanishing cycles for formal schemes. II. *Invent. Math.*, 125(2) :367–390, 1996.
- [BGR84] S. Bosch, U. Güntzer, and R. Remmert. *Non-Archimedean analysis*, volume 261 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1984. A systematic approach to rigid analytic geometry.
- [CF86] J. W. S. Cassels and A. Fröhlich, editors. *Algebraic number theory*, London, 1986. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers]. Reprint of the 1967 original.
- [Che] Miaofen Chen. Périodes entières de groupes p -divisibles sur une base générale. *Preprint*. <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00616277/fr/>.
- [Del79] Pierre Deligne. Variétés de Shimura : interprétation modulaire, et techniques de construction de modèles canoniques. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, pages 247–289. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.
- [dJ95a] A. J. de Jong. Crystalline Dieudonné module theory via formal and rigid geometry. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (82) :5–96 (1996), 1995.
- [dJ95b] A. J. de Jong. Étale fundamental groups of non-Archimedean analytic spaces. *Compositio Math.*, 97(1-2) :89–118, 1995. Special issue in honour of Frans Oort.
- [Fal99] Gerd Faltings. Integral crystalline cohomology over very ramified valuation rings. *J. Amer. Math. Soc.*, 12(1) :117–144, 1999.
- [Fal02] Gerd Faltings. A relation between two moduli spaces studied by V. G. Drinfeld. In *Algebraic number theory and algebraic geometry*, volume 300 of *Contemp. Math.*, pages 115–129. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
- [Far04] Laurent Fargues. Cohomologie des espaces de modules de groupes p -divisibles et correspondances de Langlands locales. *Astérisque*, (291) :1–199, 2004. Variétés de Shimura, espaces de Rapoport-Zink et correspondances de Langlands locales.
- [Far08] Laurent Fargues. L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld et applications cohomologiques. In *L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld*, volume 262 of *Progr. Math.*, pages 1–325. Birkhäuser, Basel, 2008.
- [Fon94] Jean-Marc Fontaine. Le corps des périodes p -adiques. *Astérisque*, (223) :59–111, 1994. With an appendix by Pierre Colmez, Périodes p -adiques (Bures-sur-Yvette, 1988).
- [FR05] Jean-Marc Fontaine and Michael Rapoport. Existence de filtrations admissibles sur des isocristaux. *Bull. Soc. Math. France*, 133(1) :73–86, 2005.
- [GH94] B. H. Gross and M. J. Hopkins. Equivariant vector bundles on the Lubin-Tate moduli space. In *Topology and representation theory (Evanston, IL, 1992)*, volume 158 of *Contemp. Math.*, pages 23–88. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [Kot84] Robert E. Kottwitz. Stable trace formula : cuspidal tempered terms. *Duke Math. J.*, 51(3) :611–650, 1984.
- [Kot85] Robert E. Kottwitz. Isocrystals with additional structure. *Compositio Math.*, 56(2) :201–220, 1985.

- [Kot97] Robert E. Kottwitz. Isocrystals with additional structure. II. *Compositio Math.*, 109(3) :255–339, 1997.
- [KR03] R. Kottwitz and M. Rapoport. On the existence of F -crystals. *Comment. Math. Helv.*, 78(1) :153–184, 2003.
- [Mes72] William Messing. *The crystals associated to Barsotti-Tate groups : with applications to abelian schemes*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 264. Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [RR96] M. Rapoport and M. Richartz. On the classification and specialization of F -isocrystals with additional structure. *Compositio Math.*, 103(2) :153–181, 1996.
- [RZ96] M. Rapoport and Th. Zink. *Period spaces for p -divisible groups*, volume 141 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.
- [Tsu99] Takeshi Tsuji. p -adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case. *Invent. Math.*, 137(2) :233–411, 1999.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, BÂTIMENT 425, UNIVERSITÉ PARIS-SUD 11, 91405, ORSAY CEDEX, FRANCE
E-mail address: miaofen.chen@math.u-psud.fr